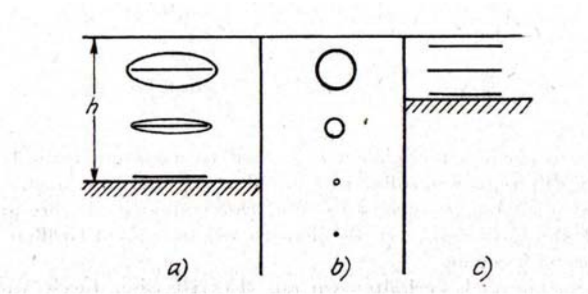
Wasserwellen

- Wasserwellen treten in unterschiedlichen Erscheinungen auf
- nur einfache Fälle sind mathematisch beschreibbar

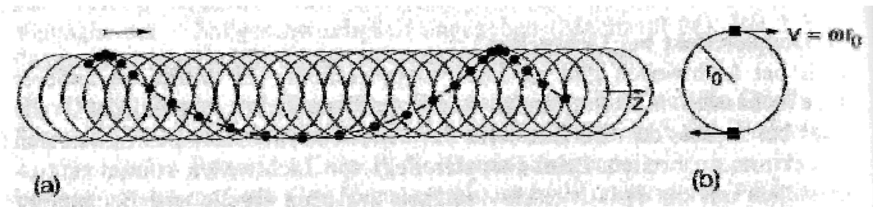
1. Schwerewellen

- Wasser-Oberflächenwellen sind transversal (Heben und Senken von Schwimmkörpern) **und** longitudinal (Ausbreitung von horizontalen Kreisen bzw. Ellipsen oder Geraden je nach Wassertiefe)



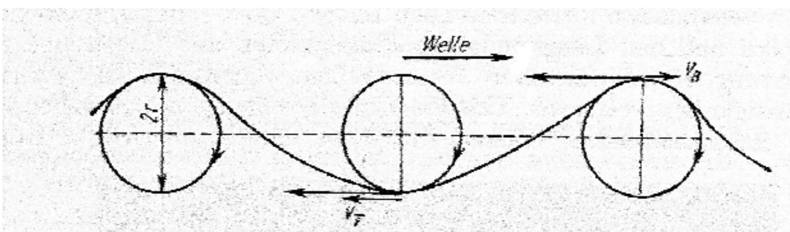
Bahnkurven der Wasserteilchen /1/
a) bei mäßig tiefem Wasser b) in Tiefwasser c) in Seichtwasser

- Beschreibung durch kreisende Wasserteilchen auf vertikalen Kreisen mit Geschwindigkeit ω (Fall: Tiefwasser)

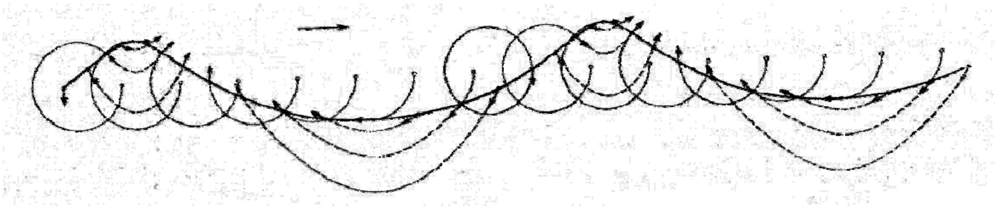


Form der Wasserwelle /2/

- Berechnung der Ausbreitungsgeschwindigkeit v_W (Phasengeschwindigkeit) der Wasserwelle:
  - zwei Teilchen – auf Kreisbahn jeweils auf Wellenberg und –tal mit Höhenunterschied 2 r_0



Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Oberflächenwellen /3/



Zusammenhang von Strom- und Bahnlinie /4/

- Bahngeschwindigkeit der Teilchen $v = \frac{2\pi\, r_0}{T} = \frac{2\pi\, r_0\, v_W}{\lambda}$

  mit $\frac{\lambda}{T} = v_W$, d. h. in der Zeit T bewegt sich die Welle um λ

- wegen der kreisenden Bewegung der Massenelemente Δm an der Oberfläche überlagern sich Ausbreitungsgeschwindigkeit v_W der Welle und Rotationsgeschwindigkeit $v = \omega\, r_0$

$\rightarrow$ kinetische Energie im Wellental ist größer als im Wellenberg

- Zur Vereinfachung der Rechnung wird angenommen, dass der Beobachter sich mit der Wellengeschwindigkeit v_W bewegt, für ihn die Welle ruht. Dann bewegen sich die Wasserteilchen in entgegen gesetzter Richtung an ihm vorbei:

- Geschwindigkeit im Wellenberg: $v_B = - v_W + \frac{2\pi r_0}{T}$

$\rightarrow$ kinetische Energie: $\frac{\Delta m}{2} v_B{}^2 = \frac{\Delta m}{2}\left(- v_W + \frac{2\pi r_0}{T}\right)^2$

- Geschwindigkeit im Wellental: $v_T = - v_W - \frac{2\pi r_0}{T}$

$\rightarrow$ kinetische Energie: $\frac{\Delta m}{2} v_T{}^2 = \frac{\Delta m}{2}\left(- v_W + \frac{2\pi r_0}{T}\right)^2$

- Differenz: $\frac{\Delta m}{2}\left(v_T{}^2 - v_B{}^2\right) = \frac{\Delta m\, 4\pi\, r_0\, v_W}{T}$

  entspricht potenzieller Energie

$$E_p = \Delta m g\, 2r = \frac{\Delta m 4\pi r v_W}{T}$$

$\rightarrow$ $$v_W = \frac{gT}{2\pi} \qquad \text{mit } T = \frac{\lambda}{v_W}$$

$\rightarrow$ $$v_W = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

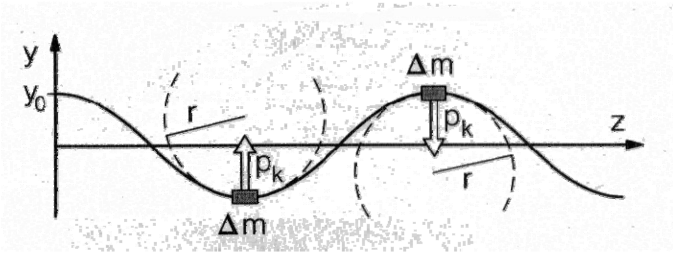
$\rightarrow$ Ausbreitungsgeschwindigkeit hängt von der Wellenlänge ab (große Wasserwellen überholen kleine)

Beziehung gilt für Oberflächenwellen in Tiefwasser $h \gg \lambda$

2. Kapillarwellen

- Oberflächenspannung σ bestimmt anstelle der Schwerkraft die rücktreibende Kraft

- Kapillardruck $p_K = \frac{2\sigma}{r}$



Entstehung der Kapillarwelle /2/

- Berechnung des Krümmungsradius durch Annahme, dass Kapillarwelle mit Kosinusfunktion genähert werden kann:
  $y(x, t=0) \approx y_0 \cos kx$, dann ist Radius gleich Reziprokwert der 2. Ableitung bei x = 0:
  $y'' \approx -k^2 y_0 \cos kx$

  mit cos 0 = $y''(0) \approx r = \frac{1}{k^2 y_0} = \frac{1}{k r_0}$

  mit r_0 = Kreisbahn des Massenelementes Δm
- Kapillardruck: $p_k \approx 2k^2 r_0 \sigma$
- Massenelement Δm mit Volumen ΔV hat Energiedifferenz der potentiellen Energie zwischen Berg und Tal
  $\Delta E_p = E_p{}^B - E_p{}^T = p_k \Delta V = p_k \frac{\Delta m}{\rho} = 2k^2 r_0 \sigma \frac{\Delta m}{\rho}$
- unter Verwendung des Energiesatzes (s. o.) in der Form
  $\frac{\Delta m}{2}(-\mathrm{v}_W - \varpi r_0)^2 - \frac{\Delta m}{2}(-\mathrm{v}_W + \varpi r_0)^2 = 2\Delta m\, \mathrm{v}_W\, \varpi\, r_0 = 2k^2 r_0 \sigma \frac{\Delta m}{\rho}$
  folgt für die Phasengeschwindigkeit der Welle
  $\mathrm{v}_W = \frac{\sigma}{\rho} \frac{k^2}{\varpi}$ für große Wassertiefen h
- ohne Ableitung gilt für Seichtwasser $h << \lambda$ $\quad \mathrm{v}_W \approx \sqrt{h}$
  Phasengeschwindigkeit lässt sich durch Wassertiefe einstellen

Literatur:

/1/ Sommerfeld, A.: Mechanik der deformierbaren Medien, 5. Aufl. Akad. Verlagsges. Geest & Portig K.-G., Leipzig 1964

/2/ Paus, H. J.: Physik in Experimenten und Beispielen, Carl Hanser Verlag München u. Wien, 1995

/3/ Schallreuter, W.: Einführung in die Physik, Bd I, VEB Fachbuchverlag, Leipzig 1970

/4/ Pohl, R. W.: Mechanik, Akustik und Wärmelehre, 12. Aufl. Springer Verlag Berlin u. a., 1953