

## Nichtlineare dynamische Gleichungen und Solitonen.

Betrachte die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{mit Amplitude } u \text{ \& Wellengeschw. } c$$

Gleichung ist linear  $\Rightarrow$  Sind  $u_1$  &  $u_2$  Lösungen der Wellengleichung, dann auch  $a_1 u_1 + a_2 u_2$ . Lösungen sind komplett bestimmt durch die Anfangs- & Randwertproblem.

Eine Lösung stellt die d'Alembertsche Form dar:

$$u(x,t) = \underbrace{f(x-ct) + g(x+ct)}_{\text{Wellen nach rechts \& links}}$$

Diese Wellen sind forminvariant, da man sie durch die similarity variable  $\xi_{\pm} = x \pm ct$  ausdrücken kann, also  $f = f(\xi_-)$  &  $g = g(\xi_+)$ .

Die Wellengleichung kann als Produkt geschrieben werden:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x,t) = 0,$$

aus der man sofort die beiden elementaren Lösungen  $f(\xi_-)$  &  $g(\xi_+)$  ablesen kann. Die spezielle similarity variable  $\xi = x \pm ct$  heisst auch Wellenvariable.

Bem.: Man kann die Diffusionsgleichung  $\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) + K \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = 0$  auch in Produktform schreiben:

$$\left( \frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} + K^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} - K^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x,t) = 0,$$

wenn man die fraktionale Ableitung  $\partial_t^{1/2}$  geeignet formuliert.

Die Dispersionsrelation der Wellengleichung erhält man durch Einsetzen von  $u(x,t) = e^{i(kx - \omega t)}$

$$\Rightarrow \omega^2 - c^2 k^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \omega = ck \Rightarrow c = \frac{\omega}{k}.$$

Wir konzentrieren uns nun auf rechtslaufende Wellen  $u(x,t) = f(x-ct)$ , die der Gleichung  $u_t + u_x c = 0$  genügt. Es sei ausserdem  $c=1$ .

Wir betrachten nun die einfachste Form einer dispersiven Wellengleichung. z.Bsp. kann man diese erhalten, wenn bei der Herleitung Terme der nächst höheren Ordnung berücksichtigt werden:

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0$$

Wir erhalten die Dispersionsrelation  $\omega = k - k^3$  mit  $C = \frac{\omega}{k} = 1 - k^2$

Die Wellengeschwindigkeit ändert sich also mit der Wellenzahl: eine superponierte Lösung ändert i. allg. also ihre Form als Funktion der Zeit: in

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk$$

haben verschiedene Fourierkomponenten mit Amplitude  $A(k)$  verschiedene Geschwindigkeiten  $\Rightarrow$  dispersive Form  $u(x, t)$ .

Neben der Phasengeschwindigkeit  $\omega/k$  ist die Gruppengeschwindigkeit

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = 1 - 3k^2 \text{ wichtig,}$$

sie beschreibt die Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Wellenpakets.

Was wäre, wenn wir gerade Ableitungen berücksichtigen würden:

$$u_t + u_x - u_{xx} = 0 \Rightarrow \omega = k - i k^2$$

$\Rightarrow u(x, t) = \exp(-k^2 t + i k [x - t])$  ist eine Lösung, die zwar als Welle propagiert, deren Amplitude aber exponentiell abklingt!

Dies wäre also eine dissipative Welle.

Kombinationen ungerader & gerader Terme ~~er~~ ergeben also eine dispersiv-dissipative Welle.

Lineare Wellengleichungen sind i.d. R. nur für kleine Auslenkungen  $u(x, t)$  gültig. Ansonsten ergeben sich nichtlineare Terme. Die einfachste nichtlineare Form der Wellengleichung ist

$$u_t + (1+u)u_x = 0.$$

Die Methode der Charakteristiken zeigt, dass Lösungen die Eigenschaft

$$u = \text{constant auf Linien mit } \frac{dx}{dt} = 1+u$$

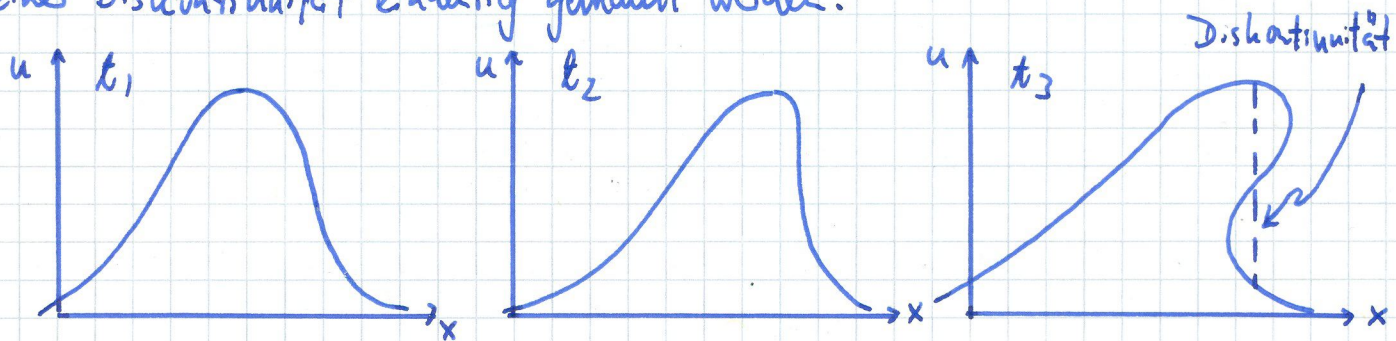
$\Rightarrow$  charakteristische Linien sind gegeben durch  $x = (1+u)t + \text{const.}$

→ Die allg. Lösung ist  $u(x,t) = f(x - [1+u]t)$

wobei  $f$  eine allgemeine Funktion ist. Die Lösung ergibt sich also tatsächlich dadurch, bei der Lösung der Wellengleichung  $c$  durch  $1+u$  zu ersetzen.

Zweites generelles Problem bei nichtlinearen Gleichungen:

(1.) selbst wenn die Lösung für kleine Zeiten eindeutig ist, ergeben sich bei bestimmten  $t$  mehrdeutige Lösungen. Diese können durch die Einführung einer Diskontinuität eindeutig gemacht werden:



(2.) Offensichtlich ist das Superpositionsprinzip verletzt (sind  $u_1$  &  $u_2$  Lösungen, dann ist  $u = u_1 + u_2$  i. allg. keine Lösung mehr).

Frage: Können sich Dissipativität und Dispersivität kompensieren?

Betrachte die einfachsten Gleichungen mit dispersiv-dissipativen Charakter:

$$u_t + (1+u)u_x + u_{xxx} = 0 \quad \text{Korteweg-de Vries - Gleichung}$$

$$u_t + (1+u)u_x - u_{xx} = 0 \quad \text{Burgers-Gleichung (oder Kardar-Parisi-Zhang - Gl. für Oberflächenwachstum)}$$

Transformation der KdV-Gl.:  $1+u \rightarrow \alpha u$ ;  $t \rightarrow \beta t$ ;  $x \rightarrow \gamma x$  ( $\alpha, \beta, \gamma = \text{const}$ )

$$\rightarrow u_t + \frac{\alpha\beta}{\gamma} u u_x + \frac{\beta}{\gamma^3} u_{xxx} = 0.$$

Am meisten gebrauchte Variante ist die KdV-Gl. in der Form:

$$\underline{u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0.}$$

Lösung mit Wave Variable:  $u = u(x-t)$ ;  $\xi = x-t$

$$\text{KdV: } u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

$$u_t = \frac{du}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -u'$$

$$u_x = \frac{du}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = u'$$

$$u_{xxx} = u'''$$

$$\Rightarrow 0 = -u' - 6uu' + u''' \Rightarrow \text{gewöhnliche Dgl } \frac{d}{d\xi}(u'' - u - 3u^2) = 0$$

$$\Rightarrow \text{Erste Integral der Bewegung: } I_1 = u'' - u - 3u^2$$

$$\Rightarrow u'' - u - 3u^2 - I_1 = 0 \quad | \times u'$$

$$u'u'' - uu' - 3u^2u' - I_1u' = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{2}(u')^2 - \frac{1}{2}u^2 - u^3 - I_1u \right)}_{I_2} = 0$$

$$u' = \frac{du}{d\xi} = \sqrt{2 \left( I_2 + \frac{1}{2}u^2 + u^3 + I_1u \right)}$$

$$\int d\xi = \xi - \xi_0 = \int \frac{du}{\sqrt{2I_2 + u^2 + 2u^3 + 2I_1u}} \quad \text{elliptisches Integral}$$

$$\text{Für } I_1 = I_2 = 0: \quad \xi - \xi_0 = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 2u^3}} = \int \frac{du/u}{\sqrt{1+2u}}$$

$$= \log(1 - \sqrt{1+2u}) - \log(1 + \sqrt{1+2u})$$

$$= -2 \operatorname{artanh}(\sqrt{1+2u})$$

$$- \frac{\xi - \xi_0}{2} = \operatorname{artanh}(\sqrt{1+2u})$$

$$1+2u = \tanh^2\left(-\frac{\xi - \xi_0}{2}\right) \leadsto u = -\frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(-\frac{\xi - \xi_0}{2}\right)$$

$$\uparrow$$
$$\tanh^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2(x)$$