

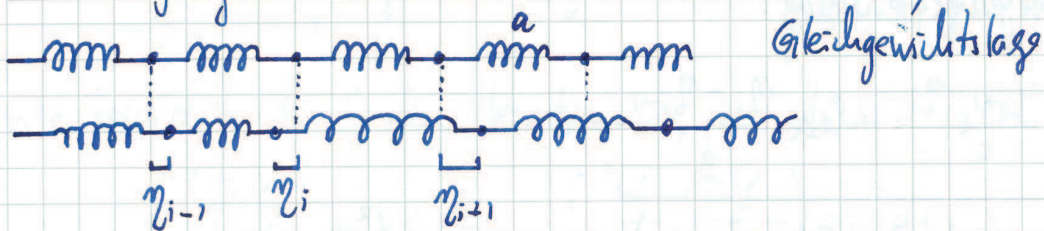
LAGRANGE & HAMILTON FORMALISMUS FÜR KONTINUIERLICHE FÄLDER

bisher: diskrete Massepunkte mit endlicher Anzahl von Freiheitsgraden

jetzt: Feldbeschreibung einer kontinuierlichen Massendichte

Bsp.: elastischer Festkörper

(1) Übergang von diskretem zu kontinuierlichem System



unendlich langer Stab mit Longitudinalschwingungen

diskrete Approximation durch unendlich lange Kette aus gleichen Massepunkten mit Gleichgewichtsabstand a und masselosen Federn mit Federkonstante k_a.

$$\leadsto T = \frac{1}{2} \sum_i m \dot{\eta}_i^2 \quad \& \quad V = \frac{1}{2} \sum_i k_a (\eta_{i+1} - \eta_i)^2$$

$$\text{Gesamtkraft auf Teilchen } i: F_i = k_a (\eta_{i+1} - \eta_i) - k_a (\eta_i - \eta_{i-1}) = -\frac{\partial V}{\partial \eta_i}$$

$$\Rightarrow \text{Lagrangefunktion } L = T - V = \frac{1}{2} \sum_i \left(m \dot{\eta}_i^2 - k_a [\eta_{i+1} - \eta_i]^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i a \left(\frac{m}{a} \dot{\eta}_i^2 - k_a \left[\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right]^2 \right) = \sum_i a L_i$$

$$\Rightarrow \text{Lagrangesche Bewegungsgleichung: } \frac{m}{a} \ddot{\eta}_i - k_a \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} + k_a \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{a} = 0$$

$$\text{Kontinuumslimit für Masse: } \frac{m}{a} \rightarrow \mu = \left\{ \begin{array}{l} \text{Masse pro} \\ \text{Längeneinheit} \end{array} \right\}$$

Laut Hookeschem Gesetz ist Längenausdehnung proportional zur Kraft (Spannung), die auf Stab wirkt: $F = \gamma \xi$:

$$\xi = \left\{ \begin{array}{l} \text{Elongation pro} \\ \text{Längeneinheit} \end{array} \right\}, \quad \gamma = \left\{ \begin{array}{l} \text{Youngscher} \\ \text{Modul} \end{array} \right\}$$

$$\text{Nun ist Dehnung des Länge a pro Längeneinheit } \xi = \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a}$$

$$\Rightarrow \text{Kraft für Dehnung des Feders ist } F = k_a (\eta_{i+1} - \eta_i) = k_a a \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a}$$

$\leadsto k_a a$ entspricht dem Youngschen Modul unseres Stabes.

94 Index $i \rightarrow$ Variable x : $\eta_i \rightarrow \eta(x)$ und $\frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \rightarrow \frac{\eta(x+a) - \eta(x)}{a}$

in Grenzfalle: $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\eta(x+a) - \eta(x)}{a} = \frac{d\eta}{dx}$

$\Rightarrow \underline{\underline{L = \frac{1}{2} \int \left(\mu \dot{\eta}^2 - \gamma \left[\frac{d\eta}{dx} \right]^2 \right) dx}}$ kontinuierliche Lagrangefunktion des Feldes $\eta(x)$.

Lagrangesche Bewegungsgleichung:

$$\frac{\mu}{a} \ddot{\eta}_i - \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a^2} + \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{a^2} = 0$$

$$- \frac{\gamma}{a} \left(\left[\frac{d\eta}{dx} \right]_x - \left[\frac{d\eta}{dx} \right]_{x-a} \right) \rightarrow -\gamma \frac{d^2 \eta}{dx^2}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{\mu \frac{d^2 \eta}{dt^2} - \gamma \frac{d^2 \eta}{dx^2} = 0}}$ Grenzwert: $\eta = \eta(x, t)$ Feldgröße

x übernimmt die Rolle des Index i und ist keine generalisierte Koordinate wie die η .

3-dim Fall: $L = \iiint \mathcal{L} dx dy dz$ mit Lagrange-dichte $\mathcal{L}$

$\underline{\underline{\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\mu \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} \right]^2 - \gamma \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} \right]^2 \right)}}$ für Bsp. des Stabes

(2) Lagrangeformalismus für kontinuierliche Systeme.

allg. Lagrange-dichte $\mathcal{L} = \mathcal{L} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial z}, \frac{\partial \eta}{\partial t}, x, y, z, t \right)$.

kont. System: Bewegungsgleichungen werden durch $\mathcal{L}$ formuliert.

Analog zum Hamiltonschen Prinzip:

$$\delta I = \delta \int_1^2 \iiint \mathcal{L} dx dy dz dt = 0.$$

NB: In dieser Feldformulierung bleiben die x, y, z sowie t unberührt von der Variation des Wirkungsintegrals. Wissen beacht, dass $\delta \rightarrow d\alpha \frac{\partial}{\partial x}$

entspricht.

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \delta \dot{\eta} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right)} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right)$$

$$\Rightarrow \delta I = \int_1^2 \iiint \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \delta \dot{\eta} + \sum \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right)} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right) \right] dx_1 dx_2 dx_3 dt = 0.$$

Wie beim diskreten System benutzen wir partielle Integration:

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \delta \dot{\eta} dt = - \int_1^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \right) \delta \eta dt.$$

$$\text{Außerdem } \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right)} \delta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right) dx_k = \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right)} \frac{\partial \delta \eta}{\partial x_k} dx_k$$

$$= \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right)} \delta \eta \right]_1^2}_{=0} - \int \frac{d}{dx_k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right)} \right) \delta \eta dx_k$$

$$\Rightarrow \delta I = \int_1^2 \iiint \delta \eta \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} - \sum_{k=1}^3 \frac{d}{dx_k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right)} \right) \right] dx_1 dx_2 dx_3 dt = 0.$$

Variation $\delta \eta(x_1, x_2, x_3, t)$ unabhängig

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} + \sum_{k=1}^3 \frac{d}{dx_k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0 \quad \text{Bewegungsgleichungen}$$

diskretes System mit f Freiheitsgraden $\Rightarrow f$ LagrangegleichungenKontinuum: "nur" eine Bewegungsgleichung, aber mit partiellen Ableitungen für das Feld η .Stab: nur ein η . Für 3D Auslenkung η_1, η_2, η_3

Allgemeiner Fall: zu jedem $\eta_j(x_1, x_2, x_3, t)$ gehört die Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_j} + \sum_k \frac{d}{dx_k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial x_k} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_j} = 0, \quad j=1,2,\dots$$

Funktionale Ableitung:

$$\frac{\delta L}{\delta \eta_j} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_j} - \sum_{k=1}^3 \frac{d}{dx_k} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial x_k} \right)} \right)$$

$\mathcal{L}$ hängt nicht von Gradienten von η_j ab $\leadsto$

$$\frac{\delta L}{\delta \eta_j} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_j}$$

In dieser Schreibweise: $\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_j} - \frac{\delta L}{\delta \eta_j} = 0$

Bsp. Elastisches Stab Hatte $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\mu \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 - \gamma \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} = \mu \dot{\eta}; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)} = -\gamma \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \gamma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad \text{konsistent mit vorigem Erg.}$$

$\Rightarrow$ Wellengleichung mit Geschwindigkeit $c = \sqrt{\frac{\gamma}{\mu}}$.

(longitudinale elastische Welle).

Bsp. Schallschwingungen in Gasen.

Longitudinalschwingungen $\leadsto$ Schallfeld $\Rightarrow$ suchen Wellengleichung für Schallausbreitung: Dichteformulierung $\mathcal{L} = T - V$; Auslenkungsfeld $\vec{\eta}$

Dichte der kinet. Energie: $T = \frac{\mu_0}{2} \dot{\vec{\eta}}^2 = \frac{\mu_0}{2} (\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2 + \dot{\eta}_3^2)$

μ_0 : Gleichgewichtsichte; Ann.: Auslenkungen klein

Gleichgewichtsdruck P_0

Thermodynamik für adiabatische Kontraktion/Expansion (kein Temperaturausgleich im Gas): $PV^\gamma = C$; γ = Adiabatenexponent

$$V = -P_0 \nabla \cdot \vec{\eta} + \frac{\gamma P_0}{2} (\nabla \cdot \vec{\eta})^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\mu_0 \dot{\vec{\eta}}^2 + 2 P_0 \nabla \cdot \vec{\eta} - \gamma P_0 (\nabla \cdot \vec{\eta})^2)$$

$$\Rightarrow \text{Lagrange gl.: } \mu_0 \frac{\partial^2 \eta_i}{\partial t^2} - \gamma P_0 \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{\eta})}{\partial x_i} = 0, \quad i=1,2,3$$

$$\text{oder } \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{\eta}}{\partial t^2} - \gamma P_0 \nabla \nabla \cdot \vec{\eta} = 0$$

relative Änderung der Dichte σ : $\mu = \mu_0 (1 + \sigma)$ & $-\mu_0 \int \sigma dV = \mu_0 \int \vec{\eta} \cdot d\vec{A}$

Divergenzsatz: $-\int \sigma dV = \int \nabla \cdot \vec{\eta} dV$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\nabla^2 \sigma - \frac{\mu_0}{\gamma P_0} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = 0}} \quad v = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\mu_0}}.$$

(3) Hamiltonformalismus für kontinuierliche Felder

lineare Kette mit diskreten Messpunkten: kanon. konj. Impuls zu η_i :

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_i} = a \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \dot{\eta}_i}$$

$$\Rightarrow H = \sum_i p_i \dot{\eta}_i - L = \sum_i a \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \dot{\eta}_i} \dot{\eta}_i - L = \sum_i a \left(\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \dot{\eta}_i} \dot{\eta}_i - \mathcal{L}_i \right).$$

Kontinuumsübergang: $L_i \rightarrow \mathcal{L}$

$$H = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}} \dot{\eta} - \mathcal{L} \right) dx$$

Impulsdichte $\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_i}$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \pi \dot{\eta} - \mathcal{L}$$

Allgemeiner Fall: $H = \iiint \mathcal{H} dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint \left(\sum_k \pi_k \dot{\eta}_k - \mathcal{L} \right) dx_1 dx_2 dx_3 (**)$

$$\text{mit } \pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_i} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\eta}_i}$$

Infinitesimale Änderung von H :

$$dH = \iiint \left[\sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_k} d\eta_k + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_k} d\pi_k + \sum_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} d \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt \right) \right] \times dx_1 dx_2 dx_3$$

Partielle Integration (Terme verschwinden im ∞):

$$dH = \iiint \left[\sum_k \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_k} d\eta_k + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_k} d\pi_k - \sum_j \frac{d}{dx_j} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \right) d\eta_k + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt \right) \right] dx_1 dx_2 dx_3$$

mit Funktionalableitung:

$$dH = \iiint \left[\sum_k \left(\frac{\delta H}{\delta \eta_k} d\eta_k + \frac{\delta H}{\delta \pi_k} d\pi_k \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt \right] dx_1 dx_2 dx_3 \quad (*)$$

Alternativ können wir schreiben (mit $(**)$):

$$dH = \iiint \left[\sum_k \left(\underbrace{\pi_k d\dot{\eta}_k + \dot{\eta}_k d\pi_k - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \eta_k} d\eta_k - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\eta}_k} d\dot{\eta}_k}_{\equiv 0 \text{ laut Def. } \pi_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \right) \right] dx_1 dx_2 dx_3$$

aus Lagrange-Gleichung folgt ausserdem:

$$\frac{\delta L}{\delta \eta_k} = \frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\eta}_k} = \dot{\pi}_k$$

$$\Rightarrow dH = \iiint \left[\sum_k \left(-\dot{\pi}_k d\eta_k + \eta_k d\pi_k \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \right] dx_1 dx_2 dx_3 \quad (***)$$

Vergleich von (*) mit (**):

(**)

$$\underline{\underline{\frac{\delta H}{\delta \eta_k} = -\dot{\pi}_k \quad \text{und} \quad \frac{\delta H}{\delta \pi_k} = \dot{\eta}_k \quad \text{mit} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}}}$$

Analoge Gleichung für $\mathcal{H}$ wirkt asymmetrisch:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_k} - \sum_j \frac{d}{dx_j} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \right)} \right) = -\dot{\pi}_k \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_k} = \dot{\eta}_k$$

Bsp Schallschwingungen Impulsdichte $\pi_k = \mu_0 \dot{\eta}_k$ bzw. $\vec{\pi} = \mu_0 \vec{\dot{\eta}}$

$$\text{mit vorigem Erg: } \mathcal{H} = \vec{\pi} \cdot \vec{\dot{\eta}} - \mathcal{L} = \frac{\vec{\pi}^2}{2\mu_0} + \frac{P_0}{2} (\nabla \cdot \vec{\eta})^2 = \mathcal{T} + \mathcal{V} = \mathcal{E}$$

$\equiv$ Energiedichte

$$\text{Kanon. Gl'n: } \dot{\eta}_k = \frac{\pi_k}{\mu_0} \quad \& \quad -\dot{\pi}_k = -\frac{d}{dx_k} \left(P_0 \nabla \cdot \vec{\eta} \right) \quad \text{ident. mit Wellengl. vorher}$$

(4) Poissonklammern

$$\text{Hamilton'sches Prinzip} \quad \delta \int_1^2 \iiint \left(\sum_k \pi_k \dot{\eta}_k - \mathcal{H} \right) dx_1 dx_2 dx_3 dt = 0$$

dx_3

$$\Rightarrow \text{Ausserdem ist} \quad \frac{dH}{dt} = \iiint \left[\sum_k \left(\frac{\delta H}{\delta \eta_k} \dot{\eta}_k + \frac{\delta H}{\delta \pi_k} \dot{\pi}_k \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right] dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\underline{\underline{\text{kanon. Gl'n.}}} \quad \iiint \left[\sum_k \left(\frac{\delta H}{\delta \eta_k} \frac{\delta H}{\delta \pi_k} - \frac{\delta H}{\delta \pi_k} \frac{\delta H}{\delta \eta_k} \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \right] dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{dH}{dt} = \iiint \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dx_1 dx_2 dx_3}} \quad \text{H-Erhaltungsgrösse, falls nur } \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0.$$

Betrachte Feldgrösse G mit Dichte dg : $G = \iiint dg dx_1 dx_2 dx_3 = G(\eta_k, \pi_k)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dG}{dt} &= \iiint \sum_k \left(\frac{\delta G}{\delta \eta_k} \dot{\eta}_k + \frac{\delta G}{\delta \pi_k} \dot{\pi}_k \right) dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \iiint \sum_k \left(\frac{\delta G}{\delta \eta_k} \frac{\delta H}{\delta \pi_k} - \frac{\delta G}{\delta \pi_k} \frac{\delta H}{\delta \eta_k} \right) dx_1 dx_2 dx_3 \equiv \{G, H\} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\frac{dG}{dt} = \{G, H\}}}$$

Hängt G explizit von der Zeit ab: $\frac{dG}{dt} = \{G, H\} + \frac{\partial G}{\partial t}$.