

$$\Rightarrow t - t_0 = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{GM}} \left(\arccos \frac{r-a}{a\varepsilon} \pm \varepsilon \sqrt{1 - \left(\frac{r-a}{a\varepsilon} \right)^2} \right)$$

Definiert $t = t(r)$ und damit $r = r(t)$. Die Umkehrfunktion kann aber nicht analytisch gebildet werden.

Eine Umlaufzeit T führt zu gleichen Wert für r , der $\arccos$ ist um 2π gewachsen

$$\Rightarrow \text{voriges Resultat } T = 2\pi a^{3/2} / \sqrt{GM}.$$

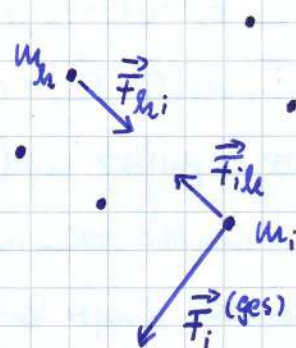
Durch Einsetzen von $r = r(\varphi)$ in $t = t(r)$, so erhält man eine entsprechende Gleichung für $t = t(\varphi)$.

II. Mechanik der Punktsysteme; Prinzipien der Mechanik.

1.) Das Punktsystem und die darauf wirkenden Kräfte

Endliche Anzahl von Massenpunkten. In Inertialsystem lauten die Bewegungsgleichungen: $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(\text{ges})}$, $i=1,2,\dots,n$

Punktsysteme: spalte die Kraft auf in eine äussere Kraft, die nicht von den anderen Massenpunkten herrührt, und eine innere Kraft: $\vec{F}_i^{(\text{ges})} = \vec{F}_i^{(\text{äusser})} + \vec{F}_i^{(\text{inner})}$



Bsp.: Innere Kräfte = Kräfte zw. den Atomen des Körpers; äussere = Schwerkraft.

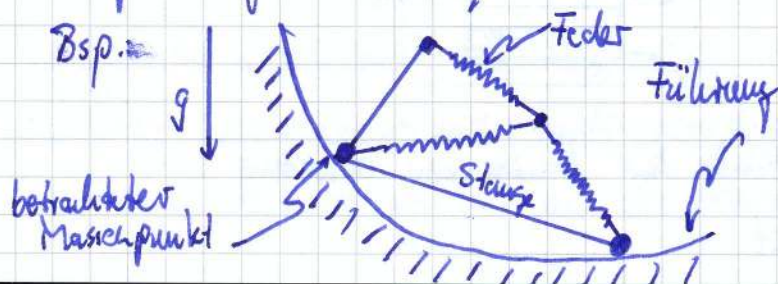
Hierbei setzt sich die innere Kraft aus den paarweisen Kräften zusammen: $\vec{F}_i^{(\text{inner})} = \sum_n \vec{F}_{in}$ und es gilt $\vec{F}_{ii} = 0$. Aus dem 3. Newtonaxiom gilt $\vec{F}_{in} = -\vec{F}_{ni}$.

Wir betrachten Systeme, wo die Kräfte nur von $\vec{r}_i - \vec{r}_n$ abhängen und Zentralkräfte sind: $\vec{F}_{in} = f_{in}(\vec{r}_i - \vec{r}_n) \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_n}{|\vec{r}_i - \vec{r}_n|}$

$$\Rightarrow \text{Bewegungsgleichungen: } m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(\text{äusser})}(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) + \sum_{n=1}^n \vec{F}_{in}(\vec{r}_i - \vec{r}_n).$$

I. allg. 3n gekoppelte DGLn 2. Ordnung.

Freie und gebundene Systeme: Auf ein freies System wirken keine zusätzlichen Zwangskräfte. Im gebundenen System bestehen zwischen $\vec{r}_i$ und $\vec{r}_n$ Bedingungengleichungen.



- Bsp.:
 $\vec{F}^{(e,a)}$ Schwerkraft: äussere eingeprägte Kraft
 $\vec{F}^{(a)}$ Äussere Führung: äussere Zwangskraft
 $\vec{F}^{(i)}$ Starre Stange: innere Zwangskraft
 $\vec{F}^{(e,i)}$ Federn: innere eingeprägte Kraft

2.) Impulsatz und Schwerpunktsatz:

Addition aller Bewegungsgleichungen: $\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \vec{F}_{ik}$

Wegen $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$: $\frac{d}{dt} \vec{p}_{\text{ges}} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{F}(\text{ges})$

Die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses ist gleich der Summe der äusseren Kräfte.

Schwerpunkt: $\vec{r}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \stackrel{\text{kontin.}}{\underset{\text{Vertlg.}}{=}} \frac{\int \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}}{\int \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}}$

Dieser Massenzentrum ist tatsächlich der Schwerpunkt (Punkt, für den sich das Gesamtsystem nicht dreht, wenn dort das System aufgestellt wird): Ist $\vec{r}_s$ der Schwerpunkt, so muss auf ihn bezogen das Gesamtdrehmoment verschwinden:

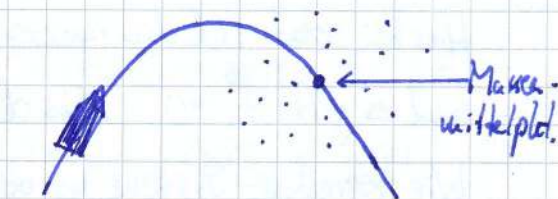
$$\sum_i \vec{r}_i \times (\vec{F}_i - \vec{F}_s) = \vec{g} \times \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_s) = 0 \quad \forall \text{ Richtung von } \vec{g} \text{ beliebig} \Rightarrow$$

$$\sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_s) = 0 \Rightarrow \vec{r}_s = \vec{r}_0.$$

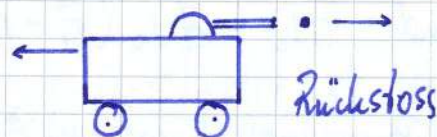
$\Rightarrow$ Impulssatz wird zu $m \ddot{\vec{r}}_0 = \vec{F}(\text{ges})$. Der Massenzentrum bewegt sich so, als ob in ihm die Gesamtmasse des Systems vereinigt wäre und in ihm die Summe aller äusseren Kräfte angreifen würde.

Bsp.: Im Schwerfeld $\vec{F}_i = m_i \vec{g}$ gilt $m \ddot{\vec{r}}_0 = m \vec{g} \Rightarrow \vec{r}_0(t) = \frac{1}{2} \vec{g} (t-t_0)^2 + \vec{v}_0 (t-t_0) + \vec{r}_0(t_0)$

Der Massenzentrum bewegt sich auf einer Parabel, gleichgültig, wie gross die inneren Kräfte sind. B. Bsp. explodierende Granate:

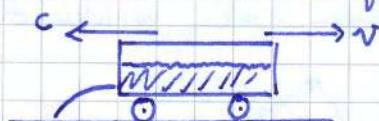
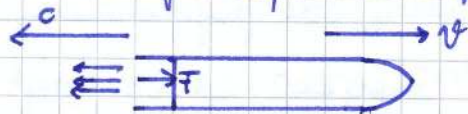


$\vec{F} = 0$: Ist die Resultierende aller äusseren Kräfte null, so gilt $m \ddot{\vec{r}}_0 = \vec{p}_{\text{ges}} = \text{const.}$



Abgeschlossenes System: Es wirken keine äusseren Kräfte $\Rightarrow m \ddot{\vec{r}}_0 = 0 \Rightarrow \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t + \vec{b}$

Anwendung des Impulssatzes auf eine Rakete bzw. einen Wasserschlepper:



c: Austrittsgeschwindigkeit der Teilchen relativ zur Rakete bzw. Fahrzeug
 $\mu = -\dot{m}$ Ausfluss an Masse pro Zeit

Impulssatz: $p_{\text{ges}} = m v + \int_{-\infty}^t \mu(v-c) dt \therefore \mu(v-c) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Impuls der pro Zeit austretende} \\ \text{Ionen Teilchen im Ruhesystem} \end{array} \right\}$ 43

$$\frac{dp_{\text{ges}}}{dt} = \frac{d}{dt} m v + \mu(v-c) = 0 \quad (\text{keine äusseren Kräfte})$$

$$\Rightarrow m v + m \dot{v} + \mu(v-c) = -\mu v + m \dot{v} + \mu(v-c) = 0 \Rightarrow \underline{m \dot{v} = \mu c}$$

3.) Drehimpulssatz Analog Herleitung beim Massepunkt.

$$\vec{r}_i \times \frac{d}{dt} \vec{p}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_k \vec{r}_i \times \vec{F}_{ik} \leadsto m_i \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d}{dt} (m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) = \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_k \vec{r}_i \times \vec{F}_{ik}$$

$$\text{Summiert über alle Massepunkte: } \frac{d}{dt} \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{i,k} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ik}$$

$$\text{Umformen der Doppelsumme: } \sum_{i,k} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ik} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i,k} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ik} + \sum_{i,k} \vec{r}_k \times \vec{F}_{ki} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,k} (\vec{r}_i - \vec{r}_k) \times \vec{F}_{ik}$$

Vertauschung der Summationsindizes

$$\text{Sind die inneren Kräfte Zentralkräfte der Form } \vec{F}_{ik} = f_{ik}(\vec{r}_i - \vec{r}_k) \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|} \Rightarrow \sum_{i,k} = 0$$

$$\text{Gesamtdrehimpuls: } \vec{N} = \sum_i \vec{N}_i = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i)$$

$$\text{Gesamtdrehmoment: } \vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$\Rightarrow \underline{\vec{N} = \vec{M}}$ Die zeitl. Ableitung des Gesamtdrehimpulses entspricht dem resultierenden Moment der äusseren Kräfte.

Beim abgeschlossenen System (keine äusseren Kräfte): $\vec{N} = \vec{C} = \text{const.}$

In Zylinderkoordinaten (z-Achse // Drehachse): $(\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i)_z = x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i = l_i^2 \dot{\varphi}_i$

$$\Rightarrow N_z = \sum m_i l_i^2 \dot{\varphi}_i = \text{const. wenn } M_z = 0$$

Sei Winkelgeschwindigkeit aller Massepunkte identisch: $\dot{\varphi}_i = \omega$

$$\Rightarrow N_z = \Theta \omega = \text{const. mit } \Theta \equiv \sum m_i l_i^2 \text{ Trägheitsmoment bezugs z-Achse.}$$

$\Rightarrow$ Damit lassen sich gut die Drehscheuexperimente erklären (z.Bsp. beim Drehen die Hände ausstrecken $\Rightarrow$ Drehung verlangsamt; vgl. Pirouetten).

Die Rolle des Schwerpunkts beim Drehimpuls

a.) Ruhende Bezugspunkte und ruhendes Koordinatensystem

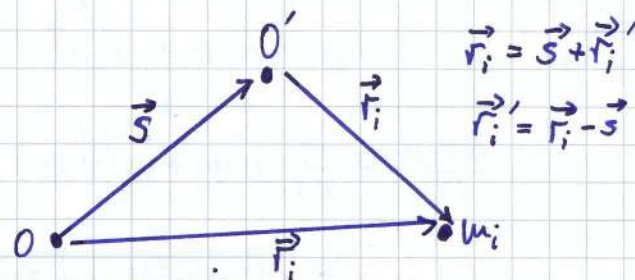
Der Drehimpuls hängt von der Wahl des Bezugspunktes ab:

Erg. für einen Polark.



$$\vec{N}_0 = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \vec{N}$$

$$\vec{N}_{0'} = \sum m_i \vec{r}_i' \times \dot{\vec{r}}_i' \equiv \vec{N}'$$



O' & O sollen ruhen: $\dot{\vec{s}} = 0$:

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_i' \Rightarrow \vec{N}' = \sum m_i (\vec{r}_i - \vec{s}) \times \dot{\vec{r}}_i = \vec{N} - \vec{s} \times \sum m_i \dot{\vec{r}}_i$$

$$\underline{\underline{\vec{N}' = \vec{N} - m(\vec{s} \times \dot{\vec{r}}_0)}}$$

$\sum_i m_i \rightarrow m \dot{\vec{r}}_0 \leftarrow$ Schwerpunkt

Ruhet der Schwerpunkt oder ist $\dot{\vec{r}}_0 = 0$, so ist Drehimpuls bezugssystemunabhängig.

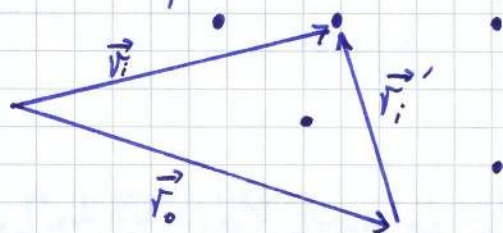
b.) Mit dem Schwerpunkt mitbewegtes System: Wähle ein Koordinatensystem, dessen Ursprung der Schwerpunkt ist, und dessen Achsen parallel sind zu denen des Inertialsystems:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_0 + \vec{r}_i'$$

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{r}_0$$

Wir haben: $\sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0) = \sum m_i \vec{r}_i' = 0$

$$\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i' = 0, \quad \sum m_i \ddot{\vec{r}}_i' = 0$$



Im ruhenden System: $\sum m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

$$\leadsto \sum m_i (\vec{r}_0 + \vec{r}_i') \times (\dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}_i') = \sum (\vec{r}_0 + \vec{r}_i') \times \vec{F}_i$$

$$\text{oder } \sum m_i \vec{r}_0 \times \dot{\vec{r}}_0 + \sum m_i \vec{r}_i' \times \dot{\vec{r}}_0 + \vec{r}_0 \times \sum m_i \dot{\vec{r}}_i' + \sum m_i \vec{r}_i' \times \dot{\vec{r}}_i' = \vec{r}_0 \times \sum \vec{F}_i + \sum \vec{r}_i' \times \vec{F}_i$$

Nach Schwerpunktssatz: $m \ddot{\vec{r}}_0 = \vec{F} = \sum \vec{F}_i \wedge \vec{r}_0 \times (m \ddot{\vec{r}}_0 - \vec{F}) = 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{d}{dt} \sum m_i \vec{r}_i' \times \dot{\vec{r}}_i' = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i}}$$

Ist äußere Kraft ~~konstant~~ $\vec{F}_i = m_i \vec{g} \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum m_i \vec{r}_i' \times \dot{\vec{r}}_i' = (\sum m_i \vec{r}_i') \times \vec{g}$

$\leadsto$ Im Schwerpunktsystem ist Drehimpuls konstant.

4.) Energiesatz; die zehn Integrale der Bewegungsgleichungen. Energiesatz gilt, wenn Kräfte konservativ sind, d.h., wenn die i. Kraft

(i.) $\vec{F}_i^{\text{ges}} = \vec{F}_i^{\text{ges}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$ nur Funktion der n Massenpunkte ist $\wedge$

(iii.) $\vec{F}_i^{\text{ges}} = -\nabla_i V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) \therefore F_{ix}^{\text{ges}} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \dots$

Bew.: $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{\text{ges}} = -\nabla_i V \quad | \cdot \vec{r}_i \leadsto \frac{d}{dt} \sum_i \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} = -\sum_i \nabla_i V \cdot \vec{r}_i$

$$\leadsto \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = - \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \frac{\partial V}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial z_n} \dot{z}_n \right) = - \frac{dV}{dt}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{1}{2} \sum m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + V = T + V = E_{\text{ges}} = \text{const.}}}$$

Aufspaltung der kinetischen Energie $T = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \sum m_i \frac{\dot{\vec{r}}_0^2}{2} + \underbrace{\sum m_i \dot{\vec{r}}_i' \dot{\vec{r}}_0}_{\equiv 0} + \sum m_i \frac{\dot{\vec{r}}_i'^2}{2}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_0^2 + \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\vec{r}}_i'^2}}$$
 Die kinetische Energie setzt sich zusammen aus der kinetischen Energie des Schwerpunkts plus der kinet. E. der Teile des Systems relativ zum Schwerpunkt.

Die zehn Integrale der Bewegung beim abgeschlossenen System.

Impulssatz: $\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{a} t + \vec{b}$

6 unabh. Konstanten = "Integrale d. Bewegg."

Drehimpulssatz: $\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \times \vec{r}_i = \vec{C}$

3

Energiesatz: $T + V^{(\text{innere})} = E_{\text{ges}}$

1

*** EINSCHUB *** 5.60

10 Integrale der Bewegung

5.) D'Alembertsches Prinzip und Lagrangegleichungen.

Gleichgewicht existiert, wenn virtuelle Arbeit $\sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$. Die virtuellen Verschiebungen müssen so gewählt sein, dass sie mit den Zwangskräften konsistent sind.

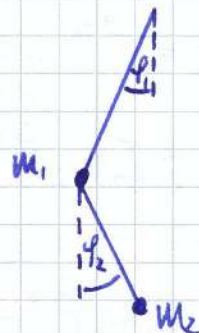
Spalten wir die Kraft $\vec{F} = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \vec{F}_i'$ in äussere & Zwangskraft auf, so muss $\sum \vec{F}_i^{\text{ext}} \cdot \delta \vec{r}_i + \sum \vec{F}_i' \cdot \delta \vec{r}_i = 0$. Wir nehmen nun an, dass $\vec{F}_i' \cdot \delta \vec{r}_i = 0$ (z.Bsp. keine Reibung).

Prinzip der virtuellen Arbeit: $\sum \vec{F}_i^{\text{ext}} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$.

Transformation der Koordinaten: Die Zwangsbedingung koppelt die Koordinaten $\vec{r}_i$: $A(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, t) = 0$. Haben wir k holonome Zwangsbedingungen, so erhalten wir $3N - k$ unabhängige Koordinaten. Diese nennen wir q_i . Das System q_i beschreibt dann die $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t)$ so, dass sie die Zwangsbed. implizit enthalten.

Bsp.: Bewegung auf Kugel: zwei Winkel

Doppelpendel: zwei Auslenkungswinkel φ_1 und φ_2



Ist das System nicht im Gleichgewicht, so wenden wir das d'Alembertsche Prinzip an:

Gleichgewicht herrscht, wenn $\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i - \vec{F}_i^* = 0$ wobei $\vec{F}_i^*$ die d'Alembert Trägheitskraft ist

$\Rightarrow$ Das System ist durch $\sum (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum (\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i + \sum \vec{F}_i' \cdot \delta \vec{r}_i = 0$ bestimmt. Wir betrachten wieder Systeme, für die die Zwangskraft $\cdot \delta \vec{r}_i = 0$:

$\Rightarrow$ D'Alembertsches Prinzip: $\sum (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$ wobei wir das Superskript weglassen.

Die Zwangskräfte treten nicht mehr auf, aber die Koordinaten sind abh. voneinander.

$\Rightarrow$ Wir drücken die $\vec{r}_i$ über die n unabhängigen Koordinaten q_j aus:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \Rightarrow \vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad \text{und} \quad \delta \vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$\Rightarrow \text{Die virtuelle Arbeit wird zu } \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i,j} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \equiv \sum_j Q_j \delta q_j$$

mit den Komponenten Q_j der generalisierten Kraft: $Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$

Bem.: Die Dimension von q_j und Q_j sind nicht notwendig Länge und Kraft, aber die von $\delta q_j \cdot Q_j$ ist die einer Arbeit.

$$2. \text{ Term im d'Alembertprinzip: } \sum \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i,j} m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt aber } \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} &= \sum_i \left(\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \right) \\ &= \sum_{i,h} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial t} \\ &= \frac{\partial \ddot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \end{aligned}$$

$$\text{Außerdem gilt } \frac{\partial \ddot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \ddot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left(\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \ddot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \right)$$

Somit: $\sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right\} \delta q_j = \sum_i \vec{p}_i \cdot \delta \vec{r}_i$ 47

Mit $T \equiv \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ bekommen wir für das d'Alembertsche Prinzip:

$$\sum_j \left(\left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} - Q_j \right) \cdot \delta q_j = 0.$$

Holonome Zwangsbed. $\Rightarrow q_j$ unabhängig $\Rightarrow \delta q_j$ unabhängig von $\delta q_k \Rightarrow$ einzelne Koeffizienten müssen verschwinden:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j=1, 2, \dots, n$$

Konservative Kräfte: $\vec{F}_i = -\nabla_i V \Rightarrow Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i -\nabla_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$

Das ist aber genau die partielle Ableitung der Funktion $-V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$ nach q_j :

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (\text{konservatives System})$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0 \quad \text{Vist aber von den } q_j \text{ unabhängig.}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0. \quad \text{Mit } L \equiv T-V \text{ Lagrangefunktion erhalten wir}$$

die Lagrangeschen Gleichungen: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0.$

Vorteile der Formulierung durch Lagrange-Gleichungen:

- Zwangskräfte treten nicht auf
- Formulierung mit zwei skalaren Funktionen anstelle vektorieller Glu.

Kinet. Energie: $T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 = a + \sum_j a_j \dot{q}_j + \sum_{j,k} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$

mit: $a = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2, \quad a_j = \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$

$$a_{jk} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

Bsp.: (1.) Bewegung eines freien Massenpunkts(a.) kartes. Koordinaten: $T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$; verallg. Kräfte F_x, F_y, F_z :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

 $\Rightarrow$ Bewegungsgln.: $\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = F_x, \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = F_y, \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = F_z$ Newton'sche Gln.(b.) Polarkoordinaten: $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi \wedge \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + (r \dot{\varphi})^2); \quad \frac{\partial T}{\partial r} = m \dot{\varphi}^2; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi}$$

$$\text{Verallg. Kräfte: } Q_r = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \vec{F} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = F_r$$

$$Q_\varphi = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \vec{F} \cdot |\vec{r}| \vec{e}_\varphi = r F_\varphi$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) = m \ddot{r} \leadsto m \ddot{r} - m r \dot{\varphi}^2 = F_r$$

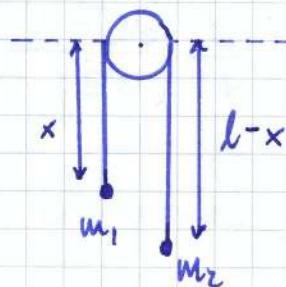
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m r^2 \ddot{\varphi} + 2 m r \dot{r} \dot{\varphi} \leadsto \underbrace{m r^2 \ddot{\varphi} + 2 m r \dot{r} \dot{\varphi}}_{\frac{d}{dt} \text{ Drehimpuls}} = \underbrace{r F_\varphi}_{\text{Drehmoment}}$$

(2.) Atwoodsche Fallmaschine: holonome skleronome Zwangsbed.(Seillänge l): 1 unabh. Koordinate x

$$\leadsto V = -m_1 g x - m_2 g (l - x); \quad T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2$$

$$\Rightarrow L = T - V = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + m_1 g x + m_2 g (l - x)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (m_1 - m_2) g; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2) \dot{x} \leadsto (m_1 + m_2) \ddot{x} = (m_1 - m_2) g \text{ oder } \ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g.$$

(3.) Gleitende Reife auf rotierendem Draht:

Hier enthalten die Transformationsgln. die Zeit explizit:

$$x = r \cos \omega t; \quad y = r \sin \omega t$$

Unser Ausdruck für T liefert: $T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2)$ (nicht hängen vom Grad 2!)

$$\text{Kräftefreier Raum: } F = 0 \leadsto m \ddot{r} - m r \omega^2 = 0 \text{ oder } m \ddot{r} = m r \omega^2$$

Bewegung nach außen durch Zentrifugalbeschleunigung.



6.) Das Hamiltonsche Prinzip D'Alembert = "Differentialprinzip"; Hamilton:

"Integralprinzip". Ein System von n Massenpunkten sei zur Zeit t_0 in der Lage $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{3n}^0)$ und zur Zeit t_1 in $(x_1^1, x_2^1, \dots, x_{3n}^1)$

Dazwischen liegt die wirkliche Bahn. Wir vergleichen diese

Bahn mit einer zweckel, wobei der Punkt $P(x_1, x_2, \dots, x_{3n})$ dem Punkt $P'(x_1', x_2', \dots, x_{3n}')$ zugeordnet wird, so

dass beide zur gleichen Zeit passiert werden: $x_i = x_i(t) \leftrightarrow x_i' = x_i'(t)$. Zu den Zeiten t_0 und t_1 sind beide Bahnen in x_i^0 bzw. x_i^1 .

$\leadsto$ Koordinatenvariation $\delta x_i \equiv x_i' - x_i$ erfüllt:

$$\delta t = 0, \quad \delta x_i(t_0) = \delta x_i(t_1) = 0; \quad \delta x_i(t) = x_i'(t) - x_i(t).$$

Die δx_i selbst sind Funktionen der Zeit. Für jedes x_i (kurze x) gilt:

$$\frac{d}{dt}(\delta x) = \frac{dx'}{dt} - \frac{dx}{dt} = x'(t) - x(t) = \delta \dot{x} \equiv \delta \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} \delta x = \delta \frac{dx}{dt} = \delta \dot{x}$$

Die Operatoren d/dt und δ dürfen vertauscht werden, da $\delta t = 0$.

Variation der Funktion $\phi(x_1, x_2, \dots, x_1, x_2, \dots, t)$: Differenz auf wirkl. & variiertes Bahn

$\phi(x_1 + \delta x_1, \dots, \frac{d}{dt}(x_1 + \delta x_1), \dots, t) - \phi(x_1, \dots, \dot{x}_1, \dots, t)$ Betrachte lineare Taylorentwicklung ($\delta^2 \ll 1$)

$$\Rightarrow \delta \phi = \sum_i \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \phi}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i \right)$$

Betrachte nun d'Alembertsches Prinzip: $\sum (F_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i = 0$. Für jedes $x_i = x$ gilt:

$$\ddot{x} \delta x = \frac{d}{dt} (\dot{x} \delta x) - \dot{x} \frac{d}{dt} \delta x = \frac{d}{dt} (\dot{x} \delta x) - \dot{x} \delta \dot{x} = \frac{d}{dt} (\dot{x} \delta x) - \delta \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 \right)$$

$$\Rightarrow \sum m_i \ddot{x}_i \delta x_i = \frac{d}{dt} \sum m_i \dot{x}_i \delta x_i - \delta \sum \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2$$

mit d'Alembert folgt also $\frac{d}{dt} \sum m_i \dot{x}_i \delta x_i = \delta \sum \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 + \sum F_i \delta x_i \equiv \delta T + \delta A$

"Lagrange'sche Zentralgleichung". δT & δA sind Variation der kinet. Energie und äußerer Kräfte

Integration nach Zeit: $\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A) dt = \left[\sum m_i \dot{x}_i \delta x_i \right]_{t_0}^{t_1} = 0 \quad (\delta x = 0 \text{ in } t_0 \text{ u. } t_1)$

$\Rightarrow$ verallgemeinertes Hamiltonsches Prinzip: $\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A) dt = 0$.

Konservative Kräfte: $\delta A = \sum F_i \delta x_i = - \sum \frac{\partial V}{\partial x_i} \delta x_i = - \delta V$

$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} \delta(T-V) dt = 0$. Da δ nicht auf Integrationsgrenze wirkt, schreiben wir

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T-V) dt = 0 \text{ oder } \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0 \therefore L = T-V$$

Die wirkliche Bahn hat das Integral einen stationären Wert (Extremum od. Sattelpkt.)

Hamiltonsches Prinzip: Bei konservativen Systemen ist für die zwischen zwei gegebenen Lagen des Systems wirklich eintretende Bahn das Zeitintegral der Lagrange'schen Funktion stationär:

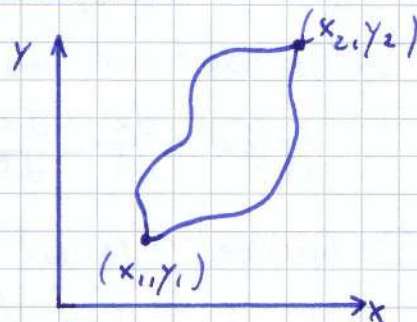
$$\int_{t_0}^{t_1} L dt = \text{Extremum}$$

7.) Die Grundaufgabe der Variationsrechnung.

Aufgabe: Bestimme Weg $y=y(x)$ zwischen $y_1=y(x_1)$ und $y_2=y(x_2)$ so, dass

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x) dx \therefore \dot{y} = \frac{dy}{dx}$$

ein Extremum besitzt.



Schreiben wir $y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha \eta(x)$ so dass für $\alpha=0$ I ein Maximum habe. Dabei ist $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$.

$$\Rightarrow I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x) dx$$

und wir fordern nun $\left(\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = 0$ und es ist $\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} \right) dx$

$$\text{Dabei ist } \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} dx \stackrel{\text{P.I.}}{=} \left[\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \eta(x) dx \stackrel{!}{=} 0$$

$\eta(x)$ beliebig $\Rightarrow$ Eulersche oder Euler-Lagrange'sche Differentialgleichung:

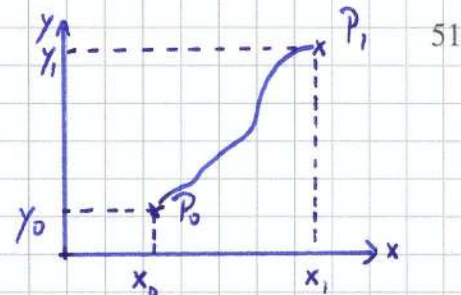
$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Identifizier wir x mit t und betrachten stattd. y das Koordinatensystem x , so gilt

analog $\frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ ähnlich unserer Lagrange'schen

Bsp.: (1.) Kürzeste Verbindung zw. zwei Punkten.

$$I = \int_{P_0}^{P_1} ds = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx$$



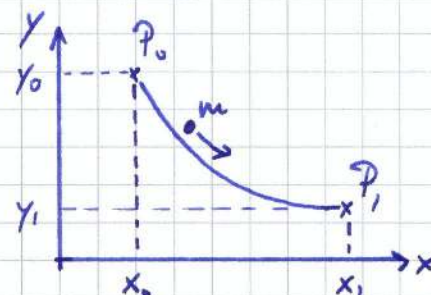
$$A(y, y', x) = \sqrt{1 + y'^2} \quad \therefore y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}; \quad \frac{\partial A}{\partial y'} = 0 \leadsto \frac{d}{dx} \frac{\partial A}{\partial y'} - \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{const.} \leadsto y' = a = \text{const.} \quad \text{allg. Lösung } y = ax + b$$

$$\text{Mit Randbed: } y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) + y_0.$$

(2.) Brachystrahlenproblem: $y(x)$ soll zwei Punkte in einer senkrechten Ebene so verbinden, dass im unter Einfluss des Schwerkrafts in kürzester Zeit von P_0 nach P_1 gelangt.



$$\text{Gesamtzeit} = \int_{t_0}^{t_1} dt = \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{v} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v} dx \stackrel{!}{=} \text{Extremum}$$

$$\text{E-Satz: } \frac{m}{2} v^2 + mgy = E; \text{ ist } v(x_0) = 0 \text{ und } E = mgy_0 \Rightarrow v = \sqrt{2g(y_0 - y)}$$

$$\Rightarrow T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y_0 - y}} dx \leadsto f(y, y', x) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y_0 - y}}$$

$$\text{Man erhält die Zykloiden-Gleichung } x = \frac{A^2}{2} (\varphi + \sin \varphi) + B$$

$$y = -\frac{A^2}{2} (1 + \cos \varphi) \quad \text{in parametr. Darst.}$$

(3.) Sei unter dem Einfluss der Schwerkraft $\rightarrow$ Kettenlinie

Hamiltonsches Prinzip: Die Forderung $\int_{t_1}^{t_2} L dt = \text{Extremum}$ mit $L = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{x}_i^2 - V(x_1, \dots)$

führt auf die Euler-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} (m_i \dot{x}_i) + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \quad \text{oder} \quad m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i \quad \text{Newtons Gl.}$$

Im Falle einer Zwangsbedingung führe die generalisierte Koordinate auf unsere vorigen Euler-Lagrange-Gleichungen.

8.) Hamiltonsche oder kanonische Bewegungsgleichungen, Hamiltonfunktion.

Es gelten holonome skleronome Bedingungen und es existiere eine Lagrangefunktion, deren Eulersche Gleichungen die Bewegungsgleichungen sind:

$$L = L(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, q_1, \dots, q_f, t) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i=1, 2, \dots, f$$

Generalisierter Impuls: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

Bei kartes. Koordinaten gleich dem gewöhnlichen Impuls: $L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V \Rightarrow p = \nabla_{\dot{\vec{r}}} L = m \dot{\vec{r}}$
 Die p_i sind Funktionen des $\dot{q}_i, q$, und t : $p_i = p_i(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f, q_1, \dots, q_f, t) \equiv p_i(q, p, t)$

Die generalisierten Geschwindigkeiten können dann als Funktion der p und q ausgedrückt werden: $\dot{q}_i = \dot{q}_i(p, q, t)$ Kurzschreibweise

Wie ersetzt man nun mathematisch konsistent die $\dot{q}_i$ durch die p_i ?

Legendretransformation: Betrachte Funktion $f(x, y)$ mit Differential $df = u dx + v dy$ wobei: $u = \partial f / \partial x$ und $v = \partial f / \partial y$. Wir wollen nun auf die unabhängige Variable u, y übergehen, so dass differentielle Größen durch die Differentiale du und dy ausgedrückt werden können. Sei g eine Funktion von u und y , definiert durch

$$g = f - ux \Rightarrow dg = df - u dx - x du = u dx + v dy - u dx - x du = v dy - x du$$

$\Rightarrow x$ und y sind also nun Funktionen der Variablen u und y , die durch

$$x = -\frac{\partial g}{\partial u} \quad \text{und} \quad v = \frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{gegeben sind.}$$

Die Transformation $g = f - ux$ ist eine Legendretrafo, die oft in der Thermodynamik auftritt. Zum Beispiel ist die Enthalpie H eine Funktion der Entropie S und des Druckes p : $\frac{\partial H}{\partial S} = T$, $\frac{\partial H}{\partial p} = V$ und $dH = T dS + V dp$ praktisch für die Betrachtung isentropischer und isobarer Prozesse. Für isotherme und isobare Prozesse sind aber die Zustandsgrößen T und p praktischer:

$$G = H - TS \Rightarrow dG = -S dT + p dV \quad \text{Gibbssche Freie Energie.}$$

Legendretrafo von L bezugs der $\dot{q}$. Definiere (Vorzeichen!) die Hamiltonfunktion

$$H(p, q, t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t) \quad (*)$$

Damit haben wir H als Funktion der p, q, t gefunden, so dass das Differential ergibt:⁵³

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (**)$$

~~Ansatz~~ Aus (*) : $dH = \sum q_i dp_i + \sum p_i dq_i - \sum \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \sum \frac{\partial L}{\partial p_i} dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$

Durch Definition des generalisierten Impulses lassen sich die folgenden Terme auf:

$$\sum p_i dq_i - \sum \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i = \sum \left(p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) dq_i \equiv 0.$$

Aus Lagrange gl.: $\frac{\partial L}{\partial q_i} = p_i$

$$\Rightarrow dH = \sum q_i dp_i - \sum p_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Vergleich mit (**): $\underbrace{q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}}_{\text{Hamiltonsche oder kanonische Gleichungen}}$

Hamiltonsche oder kanonische Gleichungen

$\Rightarrow$ Satz von 2 Bewegungsgleichungen 1. Ordnung.

Physikalische Bedeutung der Hamilton-fkt.: Lassen sich die Kräfte aus einem Potential herleiten, so gilt $T = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k$ und $V = V(q, t)$:

$$2T = \sum \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum \frac{\partial (T - V(q, t))}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum p_i \dot{q}_i$$

$$\Rightarrow \underline{H = \sum p_i \dot{q}_i - L = 2T - (T - V) = T + V}$$

Die Hamilton-fkt. in einem solchen System ist gleich der Gesamtenergie. H folgt also, indem man in der Gesamtenergie die generalisierten Koordinaten durch die dazugehörigen Impulse ersetzt.

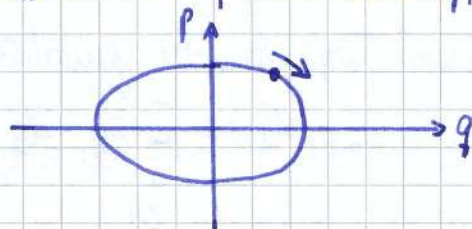
Änderung der Gesamtenergie: $\frac{dH}{dt} = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t}$
 $\underbrace{\dot{q}_i p_i - p_i \dot{q}_i}_{=0}$

Konservative Systeme: $\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ Energiesatz $H = E = \text{const.}$

Die 2n Hamiltonschen Gleichungen 1. Ordnung sind äqu. zu Lagrangegleichungen 2. Ordnung

äquivalent. Wegen ihrer Symmetrie können sie aber bei vielen Problemen vorteilhafter angewandt werden. Kanonisch heisst regelmässig. p_i wird zu q_i kanonisch konjugierter Impuls genannt. Die p, q sind die kanonischen Variablen.

Phasenraum und Phasenbahn: Der Phasenraum wird durch die 2f Koordinaten q, p aufgespannt. Die Bewegung $q_i(t), p_i(t)$ ist dann eine sog. Phasenbahn. Gilt $H(p, q) = \text{const.}$, so ist die Bahnkurve eine Ellipse.



Zyklische Koordinate: q_{α} ist zyklisch, wenn sie in L bzw. H nicht explizit auftritt. Der konjugierte Impuls ist konstant: $\dot{p}_{\alpha} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\alpha}} = 0 \Rightarrow p_{\alpha} = \text{const.}$

Invarianzeigenschaften von H und Erhaltungssätze:

(1.) Homogenität des Ortes: Ändert sich bei einer Verschiebung aller Teilchen H nicht, dann ist der Gesamtimpuls in der Verschiebungsrichtung konstant. Z. Bsp. Translation

$$\sim x: H(p_{1x}, p_{1y}, p_{1z}, p_{2x}, \dots; q_{1x} + a, q_{1y}, q_{1z}, q_{2x} + a, \dots) = H(p_{1x}, p_{1y}, \dots, q_{1x}, \dots)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial q_{1x}} + \frac{\partial H}{\partial q_{2x}} + \dots = \delta H = H - H|_{a=0} \stackrel{\text{Taylor}}{=} a \sum \frac{\partial H}{\partial q_{ix}} + o(a^2) \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0$$

$$\Rightarrow -\sum \dot{p}_{ix} = 0 \Rightarrow \sum p_{ix} = p_x = \text{const.}$$

(2.) Homogenität der Zeit: Hängt H nicht explizit von der Zeit ab $\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial t} = 0$
 $\Rightarrow H = E = \text{const.}$

(3.) Isotropie des Raumes = Homogenität der Richtung: Drehimpulserhalt (ohne Bew.)

Relativistische Verallgemeinerung: im elektromagnet. Vektorpotential $\vec{A}$ und mit $u(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ folgt $L = m_0 c^2 [1 - \sqrt{1-v^2/c^2}] + \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} - e\phi$ ← Skalarpot.

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m(v) \dot{x} + \frac{e}{c} A_x \text{ bzw. } \vec{p} = m(v) \vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A}$$

$$\text{folgt nach Rechnung } H = c \sqrt{(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2 + m_0^2 c^2} - m_0 c^2 + e\phi$$

$$\text{Kanon. Gl.: } \frac{d}{dt} \frac{m_0 \vec{p}}{\sqrt{1-\vec{p}^2/c^2}} = e \left(\vec{E} + \vec{v}/c \times \vec{B} \right) \text{ relativist. korrekte Bewegungsgl.}$$

Zeitliche Änderung einer Funktion $f(p, q, t)$ und Poissonklammern:

$$\frac{df}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \left[-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right] + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Def. der Poissonklammer: $\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$

Es gilt also: $\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Fundamentale Poissonklammern: $q_i = \{q_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$; $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$

$$p_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} ; \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0.$$

Die Poissonklammern erlauben eine direkte Quantisierung eines Systems:

$$f = \{f, H\} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{f}, \hat{H}] = \frac{1}{i\hbar} (\hat{f}\hat{H} - \hat{H}\hat{f}) = \hat{f}$$

Kommutator der Operatoren $\hat{f}, \hat{H}$

Dies funktioniert auch für Feldtheorien.

Rechenregeln für Poissonklammern: • Linearität: $\{c_1 f + c_2 g, h\} = c_1 \{f, h\} + c_2 \{g, h\}$

• Antisymmetrie: $\{f, g\} = -\{g, f\}$

• Produktregel: $\{f g, h\} = f \{g, h\} + \{f, h\} g$

• Jacobiidentität: $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$

PK-Theorem: Die Bewegungsgleichungen für die $q_i(t)$ und $p_i(t)$ werden genau dann durch eine Hamiltonfunktion $H(q, p, t)$ erzeugt, wenn für jedes Paar von Observablen $u = u(q, p, t)$ und $v = v(q, p, t)$ die folgende Beziehung erfüllt ist:

$$\frac{d}{dt} \{u, v\} = \left\{ \frac{du}{dt}, v \right\} + \left\{ u, \frac{dv}{dt} \right\} \text{ erfüllt ist.}$$

Erlaubt zu entscheiden, ob ein System mit gegebenen Bewegungsgleichungen auf eine Hamiltonsche Form gebracht werden können.

9.) Kanonische Transformationen.

Punkttransformationen: Neue Koordinaten $Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_f, t)$ $i=1, 2, \dots, f$ sollen das System beschreiben. Dann müssen sich die Q_i nach den q_i auflösen lassen, d.h. $\det\{\partial Q_i / \partial q_j\} \neq 0$: $q_i = q_i(Q_1, \dots, Q_f, t)$. Punkttrafos sind aber nicht allgemein genug.

Kanonische Transformation: Es werden sowohl Koordinaten als auch Impulse transformiert: $Q_i = Q_i(q, p, t)$ und $P_i = P_i(q, p, t)$.

Die Umkehrfunktionen sind $q_i = q_i(Q, P, t)$ und $p_i = p_i(Q, P, t)$.

Kanonische Transformationen sind solche Transformationen $Q = Q(q, p, t)$ und $P = P(q, p, t)$, bei denen die Hamiltonschen Gleichungen $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ und $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ wieder in Hamiltonsche Gleichungen übergehen, d.h.

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i}, \quad \text{wobei } \tilde{H} \text{ die transformierte Hamiltonfkt. ist.}$$

Erzeugung von kanonischen Trafos: Kanonische Glu folgen aus dem Hamiltonschen Prinzip $\rightarrow$ auch das kanonisch transformierte System erfüllt dieses Prinzip:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} [\sum p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)] dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} [\sum P_i \dot{Q}_i - \tilde{H}(Q, P, t)] dt = 0.$$

Dazu müssen die Integranden nur um das totale Differential einer Funktion ϕ verschieden sein: $\sum p_i \dot{q}_i - H = \sum P_i \dot{Q}_i - \tilde{H} + \frac{d\phi}{dt}$ (*)

ϕ ist eine Funktion der 4f Variablen q, p, Q, P , die jedoch nicht unabhängig sind. Denkt man sich die 2f Variablen gegeben als $P_i(q, p)$ und $q_i(Q, P)$, so hängt ϕ nur noch von den 2f Koordinaten ab, $\phi = \phi(q, Q, t)$.

Diese Bedingung ist hinreichend, denn die Variation von $\int \frac{d\phi}{dt} dt$ verschwindet:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\phi}{dt} dt = \delta [\phi(q, Q, t)]_{t_1} - \delta [\phi(q, Q, t)]_{t_0} = 0.$$

Mit $\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial \phi}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \phi}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right)$ erhalten wir mit (*):

$$\sum \left(p_i - \frac{\partial \phi}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i = \sum \left(P_i + \frac{\partial \phi}{\partial Q_i} \right) \dot{Q}_i + H - \tilde{H} + \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Diese Beziehung wird erfüllt, falls:

$$\underline{p_i = \frac{\partial \phi(q, Q, t)}{\partial q_i}, \quad \underline{P_i = -\frac{\partial \phi(q, Q, t)}{\partial Q_i}, \quad \underline{\tilde{H} = H + \frac{\partial \phi(q, Q, t)}{\partial t}}}$$

Diese Gleichungen stellen für beliebiges $\phi(q, Q, t)$ eine kanonische Transformation dar, wobei $\tilde{H}$ die neue Hamiltonsche Funktion ist. ϕ ist die Erzeugende der Transformation. Ist sie nicht explizit von t abhängig, so wird $\tilde{H} = H$ (in der neuen Variablen).

Bem.: Anstelle $\phi(q, Q, t)$ kann man ϕ auch aus anderen q alten und f neuen Variablen betrachten, also: $\phi(q, Q, t)$, $\phi(q, P, t)$, $\phi(p, Q, t)$, $\phi(p, P, t)$. z. Bsp. folgt für $\phi(q, P, t)$:

$$\sum p_i q_i - H = \sum P_i Q_i - \tilde{H} + \frac{d}{dt}(\phi - \sum P_i Q_i) \text{ und damit}$$

$$p_i = \frac{\partial \phi(q, P, t)}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial \phi(q, P, t)}{\partial P_i}, \quad \tilde{H} = H + \frac{\partial \phi(q, P, t)}{\partial t}$$

Dabei kann der Koordinaten- und Impulscharakter von Q, P ganz verloren gehen, Bsp.:

$$\phi = \sum q_i Q_i \Rightarrow p_i = Q_i \text{ und } q_i = -P_i.$$

Mit der Erzeugenden $\phi = \sum F_i(q, t) P_i$ folgt $Q_i = F_i(q, t)$ d.h. eine Punkttrafo $\Rightarrow$ Alle Punkttransformationen sind kanonisch.

Bsp.: (1.) Harmonischer Oszillator: $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} x^2$

Wähle $\phi(q, Q) = \frac{m\omega}{2} q^2 \cot Q$ fällt hier von 1. Summe

$$\Rightarrow p = \frac{\partial \phi}{\partial q} = m\omega q \cot Q, \quad P = -\frac{\partial \phi}{\partial Q} = \frac{m\omega}{2} \frac{q^2}{\sin^2 Q}$$

Auflösen nach q und p : $q = \sqrt{\frac{2}{m\omega}} \sqrt{P} \sin Q$ und $p = \sqrt{2m\omega} \sqrt{P} \cos Q$

$$\Rightarrow \text{Einsetzen liefert } \tilde{H} = \omega P$$

Somit ist $\tilde{H}$ zyklisch in Q ! $\Rightarrow \dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0$; $\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = \omega$ ergibt $P = \alpha$; $Q = \omega t + \beta$ mit den Konstanten α, β . In der alten Koordinate haben wir das bekannte Erg.:

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega}} \sin(\omega t + \beta) = C \sin(\omega t + \beta); \quad p = m\omega C \cos(\omega t + \beta) = m\dot{q}$$

Invarianz des Phasenraumelements: Bei einer kanon. Trafo bleibt das Phasenraumelement $dq_1, dq_2, \dots, dq_f, dp_1, dp_2, \dots, dp_f = dQ_1, dQ_2, \dots, dQ_f, dP_1, dP_2, \dots, dP_f$ gleich. (Satz v. Poincaré).

Es gilt also: $\begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial Q_1} & \dots & \frac{\partial q_1}{\partial P_f} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial p_f}{\partial Q_1} & \dots & \frac{\partial p_f}{\partial P_f} \end{vmatrix} = 1$ Erhaltung der Funktions/determinante.

Bew. für 2 Variablen (allgemeiner Fall siehe Goldstein):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial Q} \\ \frac{\partial q}{\partial P} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{vmatrix} = \frac{\partial q}{\partial Q} \frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial p}{\partial Q} \frac{\partial q}{\partial P} = \frac{-\frac{\partial^2 \phi}{\partial Q^2}}{\frac{\partial^2 \phi}{\partial q \partial Q}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial q^2} \frac{\partial q}{\partial P} - \underbrace{\frac{\partial^2 \phi}{\partial q \partial Q} \frac{\partial q}{\partial P}}_{=1} \\ + \frac{\frac{\partial^2 \phi}{\partial q^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial Q^2}}{\frac{\partial^2 \phi}{\partial q \partial Q}} \frac{\partial q}{\partial P} = 1.$$

Die Poisson-Klammern sind ebenfalls invariant:

$$\{q, q\} = \sum \left(\frac{\partial q}{\partial q_i} \frac{\partial q}{\partial p_i} - \frac{\partial q}{\partial p_i} \frac{\partial q}{\partial q_i} \right) = \sum \left(\frac{\partial q}{\partial Q_i} \frac{\partial q}{\partial P_i} - \frac{\partial q}{\partial P_i} \frac{\partial q}{\partial Q_i} \right)$$

Es gilt: Die notwendige und hinreichende Bedingung, dass die Transformation $Q_i = Q_i(q, p)$ und $P_i = P_i(q, p)$ kanonisch ist, lautet:

$$\{Q_i, Q_j\} = 0; \{P_i, P_j\} = 0; \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, f.$$

III. Mechanik des starren Körpers. In einem starren Körper ist die gegenseitige Distanz je zweier Punkte immer konstant. Er ist durch 6 voneinander unabhängige Koordinaten bestimmt, hat also 6 Freiheitsgrade, solange er frei beweglich ist: Wähle beliebigen Punkt A im starren Körper: 3 Freiheitsgrade. Der zweite Punkt B kann sich nur noch auf einer Kugeloberfläche um A bewegen: 2 Freiheitsgrade. Ein dritter Punkt kann sich nur noch in einer Kreisbahn um die Achse AB bewegen: 1 Freiheitsgrad.

Wird der starre Körper an einem Punkt unterstützt, so hat er nur noch 3 Rotationsfreiheitsgrade: Kreisel. Wird eine feste Drehachse festgelegt, so hat eine solches physikalisches Pendel noch einen Freiheitsgrad.

Problem bei der Beschreibung der Bewegung des starren Körpers: Rotationen sind nicht vertauschbar.

Es gilt: Jede Verschiebung des starren Körpers (Überführung von einer Anfangslage in eine beliebige vorgeschriebene Endlage) lässt sich aus einer Translation und einer Rotation zusammensetzen. Der Satz von Chasles sagt sogar aus, dass sich immer eine solche Translation finden lässt, die zur Rotationsachse parallel ist: die allgemeinste Verschiebung eines starren

Körper ist äquivalent einer Schraubenbewegung oder Bewegungsschraube.

Die allgemeine Bewegung des starren Körpers aus Lage 1 nach Lage 2 wird in den Zwischenschritten von der Verschiebung abweichen. Diese Bewegung können wir aber aus sukzessiven infinitesimalen Verschiebungen zusammensetzen: die allgemeinste Bewegung des starren Körpers ist eine Aufeinanderfolge elementarer (infinitesimaler) Translationen und Rotationen (oder elementarer Schraubenbewegungen). Die zu einem bestimmten Zeitpunkt gehörige Rotationsachse bezeichnet man als momentane oder instantane Drehachse.

Die elementare Translation $d\vec{s}$ und die Translationsgeschwindigkeit $\frac{d\vec{s}}{dt}$ sind freie Vektoren: ihr Anfangspunkt kann in jeder beliebigen Punkt des starren Körpers gelegt werden.

Elementare Rotation erzeugt die elementare Verschiebung

$$d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r} \text{ und Geschwindigkeit } \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Zwei aufeinanderfolgende elementare Drehungen, um die sich

im Punkt O schneiden der Drehachsen $d\vec{\varphi}_1$ und $d\vec{\varphi}_2$:

$$d\vec{r}_1 = d\vec{\varphi}_1 \times \vec{r}$$

$$d\vec{r}_2 = d\vec{\varphi}_2 \times (\vec{r} + d\vec{r}_1) = d\vec{\varphi}_2 \times \vec{r} + \underbrace{d\vec{\varphi}_2 \times d\vec{r}_1}_{2. \text{ Ordnung wird vernachlässigt}}$$

$$\Rightarrow d\vec{r} = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2 = d\vec{\varphi}_1 \times \vec{r} + d\vec{\varphi}_2 \times \vec{r} = (d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2) \times \vec{r} = [(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r}] dt$$

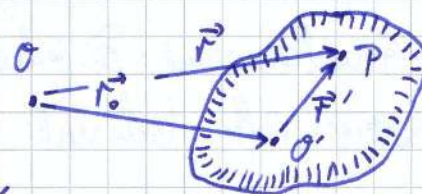
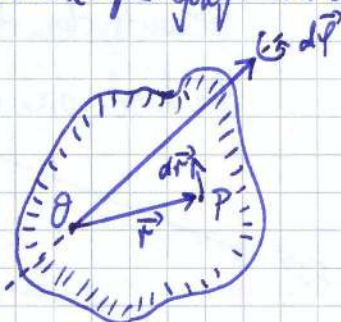
Und damit auch $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$: Winkelgeschwindigkeiten werden wie Vektoren addiert und infinitesimale Rotationen sind vertauschbar.

Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes: die Elementarverschiebung ist gegeben durch eine Translation $d\vec{r}_0$ und eine in O' verlaufende Rotationsachse mit Verschiebung $d\vec{\varphi} \times \vec{r}'$.

Eulersche Formeln: Die elementare Verschiebung des Punktes P des starren Körpers beträgt

$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{\varphi} \times \vec{r}' = d\vec{r}_0 + d\vec{\varphi} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

Geschwindigkeit des Punktes P : $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)$



*** EINSCHUB AD SEITE 45 ***

Für ein gebundenes System haben wir die Bewegungsgleichungen $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_i'$, $i=1,2,\dots,n$ mit den Zwangskräften $\vec{F}_i'$. Diese sind i.allg. unbekannt. Einzelne Massenpunkt: Annahme dass $\vec{F}_i'$ senkrecht zur vorgegebenen Bahn/Kurve. Diese Formulierung ist ungeeignet zur Verallgemeinerung für ein System von Massenpunkten, da andere Zwangsbedingungen als vorgeschriebene Flächen/Kurven auftreten können (Bsp. starre Stange). Man kann aber das Prinzip der virtuellen Arbeit direkt verallgemeinern.

Frage: Soll die virtuelle Arbeit für jeden einzelnen Massenpunkt verschwinden oder für das Gesamtsystem die Summe der virtuellen Arbeiten? Betrachte zwei Massenpunkte, die durch eine masselose starre Stange verbunden sind: Stange fixiert Abstand



von m_1 und m_2 . Annahme, dass Zwangskraft in Richtung der Verbindung von m_1 & m_2 : $\vec{F}_1' = -\vec{F}_2'$. Jede mögliche kleine Verdrückung des Systems lässt sich aus der Translation $\delta \vec{r}_1 = \delta \vec{r}_2$ und einer kleinen Rotation

um m_1 zusammensetzen. Die virtuelle Arbeit der Zwangskraft $\vec{F}_1'$ und $\vec{F}_2'$ wird zu $\vec{F}_1' \delta \vec{r}_1$ und $\vec{F}_2' \delta \vec{r}_2 = -\vec{F}_1' \delta \vec{r}_1$, d.h. die Gesamtarbeit ist null. Die Arbeit der Rotation verschwindet ebenfalls, da die Verdrückung von m_2 senkrecht zur Zwangskraft steht.

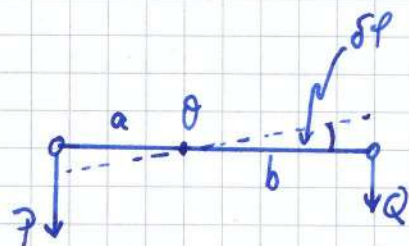
⇒ Grundannahme: Bei jedem Punktsystem ist die gesamte virtuelle Arbeit der Zwangskräfte gleich null: $\sum \vec{F}_i' \delta \vec{r}_i = 0$.

Aus $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_i'$ folgt $\sum \vec{F}_i' \delta \vec{r}_i = -\sum (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \delta \vec{r}_i$

⇒ vereinigte Form des Prinzips der virtuellen Arbeit und des d'Alembertschen Prinzips: $\sum (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \delta \vec{r}_i = 0$.

Im Gleichgewichtsfall: $\sum \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = 0$

Bsp.: Hebel: virt. Arbeit $P a \delta \varphi - Q b \delta \varphi = 0$



⇒ $P a = Q b$ die auf Achse O bezogenen Drehmomente sind gleich.

Das d'Alembertsche Prinzip (und somit auch das Prinzip der virtuellen Arbeit) ist ein selbständiges Prinzip der Mechanik, dem allgemeine Gültigkeit zugeschrieben wird, da die aus ihm gewonnenen Folgerungen stets durch die Erfahrung bestätigt worden sind.

Freies System: jede Verschiebung $\delta \vec{r}_i$ ist beliebig $\Rightarrow$ in der Summe $\sum (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i) \delta \vec{r}_i = 0$ muss jeder einzelne Term verschwinden $\Rightarrow$ Newtongleichungen $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i, i=1, 2, \dots, n$.

Wir führen die vereinfachte Notation ein:

Koordinaten statt $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n \rightarrow x_1, x_2, x_3, \dots, x_{3n-2}, x_{3n-1}, x_{3n}$

Kräfte statt $F_{x1}, F_{x2}, F_{x3}, \dots, F_{xn}, F_{yn}, F_{zn} \rightarrow F_1, F_2, F_3, \dots, F_{3n-2}, F_{3n-1}, F_{3n}$

Massen statt $m_1 \rightarrow m_1 = m_2 = m_3, \dots, m_n \rightarrow m_{3n-2} = m_{3n-1} = m_{3n}$

D'Alembert-Prinzip in rechtwinkligen Koordinaten wird zu: $\sum_{i=1}^{3n} (F_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i = 0$.

Einteilung der Bewegungsgleichungen: Haben wir $r \leq 3n$ Bedingungsgleichungen der Form

$$f_{\ell}(x_1, x_2, \dots, x_{3n}, t) = 0 \quad (\ell = 1, 2, \dots, r) \quad (*)$$

so ist das System holonom. Genauer: holonom-skleronom oder holonom-rheonom, je nachdem, ob Zeit explizit fehlt oder auftritt. Man kann (*) schreiben als

$$\frac{\partial f_{\ell}}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f_{\ell}}{\partial x_i} dx_i + \dots + \frac{\partial f_{\ell}}{\partial x_{3n}} dx_{3n} + \frac{\partial f_{\ell}}{\partial t} dt = 0$$

Allgemeinere Bedingungsgleichungen der Form:

$$a_{\ell 1} dx_1 + \dots + a_{\ell i} dx_i + \dots + a_{\ell, 3n} dx_{3n} + a_{\ell 0} dt = 0 \quad (\ell = 1, 2, \dots, r) \quad (**)$$

wobei $a_{\ell i} = a_{\ell i}(x_1, x_2, \dots, x_{3n}, t)$.

Ist (**) ein vollständiges Differential, sind also $a_{\ell i} = \frac{\partial f_{\ell}}{\partial x_i}$ und $a_{\ell 0} = \frac{\partial f_{\ell}}{\partial t}$, haben wir ein holonomes System. Im anderen Fall ist das System nichtholonom.

$a_{\ell 0} = 0$: skleronom, sonst rheonom.

Formulierung der Lagrangegleichungen erster Art: Multipliziere jede Gleichung von (**) mit λ , usw., und addiere diese Bedingungen zum d'Alembertprinzip:

$$\sum_{i=1}^{3n} (F_i - m_i \ddot{x}_i + \lambda_1 a_{1i} + \dots + \lambda_r a_{ri}) \delta x_i = 0$$

Wähle die Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ so, dass r Glieder der Summe verschwinden (denn wir haben ja r Bedingungsgleichungen). In den restlichen $3n-r$ Gliedern können dann die δx_i als voneinander unabhängig angesehen werden und somit beliebig gewählt werden. Die zugehörigen Koeffizienten müssen verschwinden:

$$m_i \ddot{x}_i = F_i + \lambda_1 a_{1i} + \dots + \lambda_r a_{ri} \quad (i=1, 2, \dots, 3n)$$

Dies sind die Lagrange-Gleichungen 1. Art. Zusammen mit den r Bedingungsgleichungen ergeben sich $3n+r$ Gleichungen, mit denen wir die Koordinaten $x_1, \dots, x_{3n}$ und die Multiplikatoren $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ bestimmen.

Lassen sich diese Gleichungen integrieren und damit die λ_i ermitteln, können wir die Zwangskräfte ermitteln. Diese sind durch $m_i \ddot{x}_i = F_i + F_i'$ definiert $\Rightarrow$ wir haben

$$F_i' = \lambda_1 a_{1i} + \dots + \lambda_r a_{ri} \quad (i=1, 2, \dots, 3n).$$

Bei einem holonom System mit den Bedingungsgleichungen $f_h(x_1, \dots, x_{3n}, t) = 0$ lauten dann die Lagrange-Gln. erster Art:

$$m_i \ddot{x}_i = F_i + \lambda_1 \frac{\partial f_h}{\partial x_i} + \dots + \lambda_r \frac{\partial f_h}{\partial x_i} \quad (i=1, 2, \dots, 3n)$$

mit den Zwangskräften $F_i' = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial x_i}$.

Energiesorb: Bei einer wirklichen Verdrückung $dx_1, dx_2, \dots$ des Systems in der Zeit dt

$$\text{ist die Arbeit } \sum_{i=1}^{3n} F_i' dx_i = \sum_{h=1}^r (\lambda_h \sum_{i=1}^{3n} a_{hi} dx_i) \\ \text{des Zwangskräfte} \\ \underline{\underline{= \sum_{h=1}^r \lambda_h a_{h0} dt}} \\ (a_{h1} dx_1 + \dots + a_{h,3n} dx_{3n} + a_{h0} dt = 0)$$

Die Gesamtarbeit der Zwangskräfte im skleronomem System ist null.

Oft wollen wir die Zwangskräfte gar nicht wissen. Wir formulieren die mechanischen Gleichungen nun so, dass diese nicht mehr auftreten $\rightarrow$ Lagrange-Gln. 2. Art.

1. Beschreibung der Bewegung des starren Körpers.

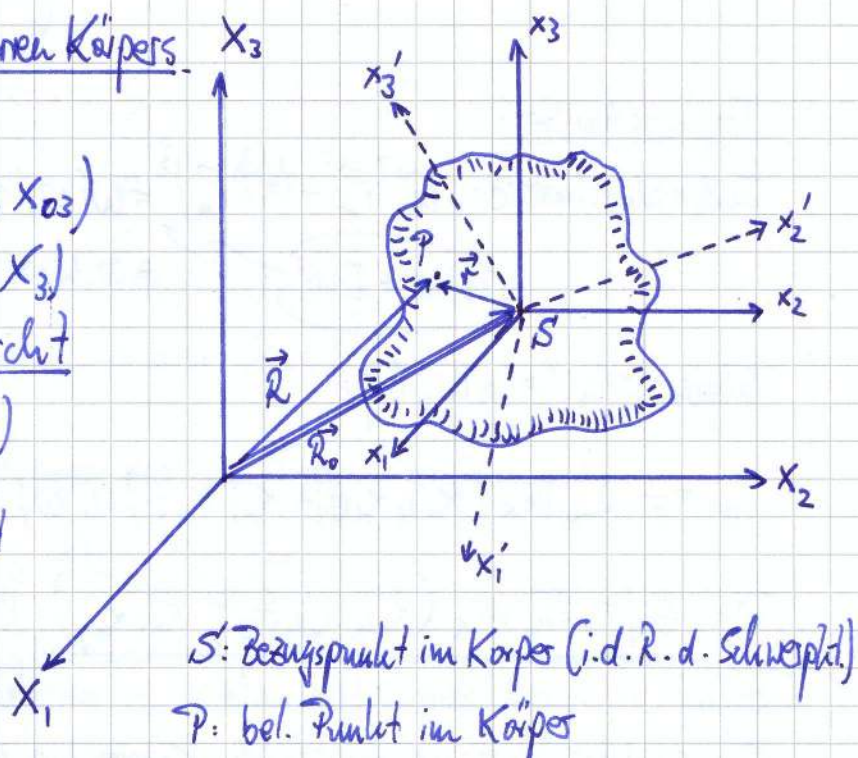
3 Koordinatensysteme: $\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{r}$

System I: Inertialsystem, $\vec{R}_0 = (x_0, x_02, x_03)$

$$\vec{R} = (x_1, x_2, x_3)$$

System II: Mit S mitbewegtes, aber nicht mitgedrehtes System: $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$

System III: Mit dem starren Körper fest verbundenes System: $\vec{r} = (x_1', x_2', x_3')$



Geschwindigkeit des Punktes P in dieser Notation:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} = \frac{d\vec{R}_0}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (\text{vgl. S. 59}).$$

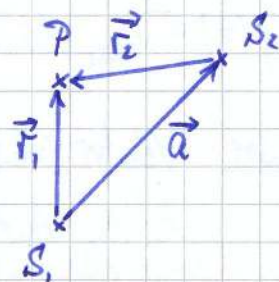
Andere Wahl des Bezugspunktes: $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 - \vec{a}$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_1, \text{ aber auch}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 = \vec{v}_0 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_1 - \vec{\omega}_2 \times \vec{a}$$

Da $\vec{r}_1$ beliebig ist und $\vec{\omega}_2$ fix $\Rightarrow \vec{v}_0 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_1 = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{a}$ und $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}$

Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit ist vom Bezugspunkt unabhängig.



2. Kinetische Energie des starren Körpers, Trägheitstensor.

Der starre Körper habe die Massepunkte m_α : $\vec{v}_\alpha = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha^2 = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_0^2 + \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) + \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2 \equiv T_{\text{trans}} + T_w + T_{\text{rot}}$$

$$\text{Translationsenergie } T_{\text{trans}} = \frac{\vec{v}_0^2}{2} \sum_\alpha m_\alpha = \frac{m \vec{v}_0^2}{2} \therefore m \equiv \sum_\alpha m_\alpha \text{ Gesamtmasse}$$

$$\text{Wechselseitige Energie } T_w = \vec{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha) = m \vec{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_S), \vec{r}_S = \frac{1}{m} \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha$$

T_w verschwindet, wenn Ursprung des körperfeste Systems im Schwerpunkt liegt, oder falls die Translationsgeschwindigkeit verschwindet.

Rotationsenergie: $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha})^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\vec{\omega}^2 \vec{r}_{\alpha}^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{\alpha})^2]$

komponentenweise $[\] = \vec{\omega}^2 \vec{r}_{\alpha}^2 (1 - \cos^2 \alpha)$

Trägheitstensor:

Indizeschreibweise: $\vec{\omega}^2 \vec{r}_{\alpha}^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{\alpha})^2 = \omega_i \omega_j x'_{\alpha i} x'_{\alpha j} \delta_{ij} - \omega_i x'_{\alpha i} \omega_j x'_{\alpha j}$ System III

$\omega_i \omega_j = \sum_i \omega_i^2$

$= \omega_i \omega_j x_{\alpha i} x_{\alpha j} \delta_{ij} - \omega_i x_{\alpha i} \omega_j x_{\alpha j}$ System I

Wegen $\omega_i \omega_j = \omega_i \omega_j \delta_{ij}$:

T_{rot} ist invariant unter Wechsel des KRS.
 $\Rightarrow \Theta$ ist Tensor

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x'_{\alpha i} x'_{\alpha j} \delta_{ij} - x'_{\alpha i} x'_{\alpha j}) \omega_i \omega_j \equiv \frac{1}{2} \Theta_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} \Theta_{ij} \omega_i \omega_j$$

Die $\Theta_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x'_{\alpha i} x'_{\alpha j} \delta_{ij} - x'_{\alpha i} x'_{\alpha j})$ Komponenten des Trägheitstensors im körperfesten Koordinatensystem

Θ_{ij} sind bei Bewegung des starren Körpers konstant.

Die Komponenten im raumfesten System sind i. allg. nicht konstant:

$$\Theta_{ij}(t) = D_{ki}(t) D_{lj}(t) \Theta'_{kl} \quad \because \quad D_{ij}(t) \text{ ist Drehtensor} \quad \therefore \quad \dot{\Theta}_{ij} = \dot{D}_{ik} D_{jl} \Theta'_{kl}$$

Drehtensor: Vektor soll gedreht werden: $A'_i = D_{ij} A_j$, Länge $A_i A_i$ bleibt konstant:
 $A'_i A'_i = A_i A_i \Rightarrow D_{ij} D_{ik} = D_{ji} D_{ki} = \delta_{ij}$

Trägheitstensor in Matrixform:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x'^2_{\alpha 2} + x'^2_{\alpha 3}) & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x'_{\alpha 1} x'_{\alpha 2} & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x'_{\alpha 1} x'_{\alpha 3} \\ -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x'_{\alpha 2} x'_{\alpha 1} & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x'^2_{\alpha 1} + x'^2_{\alpha 3}) & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x'_{\alpha 2} x'_{\alpha 3} \\ -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x'_{\alpha 3} x'_{\alpha 1} & -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x'_{\alpha 3} x'_{\alpha 2} & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x'^2_{\alpha 1} + x'^2_{\alpha 2}) \end{pmatrix}$$

Trägheitstensor bei kontinuierlicher Massenverteilung:

$$\Theta_{ij} = \iiint \rho(x'_1, x'_2, x'_3) \left((x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3) \delta_{ij} - x'_i x'_j \right) dx'_1 dx'_2 dx'_3$$

↑
Massendichte

Hauptträgheitsachsen: $\Theta_{ij}' = \Theta_{ji}' \leadsto \Theta$ symmetrisch $\leadsto \exists$ Koordinatensystem, in dem Θ_{ij}' diagonal sind.

Im Hauptachsensystem ist $\Theta_{ij}' = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix}$

Eigenwerte Θ_α bekommt man aus $\det(\Theta_{ij}' - \Theta_\alpha \delta_{ij}) = 0$.

Diese Eigenwerte sind Invarianten, es gilt also $\Theta_\alpha = \Theta_\alpha'$.

Die Hauptachsearrichtungen bekommt man aus den Eigenvektorgleichungen

$$\Theta_\alpha A_i^{(\alpha)} = \Theta_{ij}' A_j^{(\alpha)} \text{ bzw. } \Theta_\alpha A_i'^{(\alpha)} = \Theta_{ij}' A_j'^{(\alpha)}$$

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigen~~vektoren~~^{werten} Θ_α stehen aufeinander senkrecht. Im Falle der Entartung können sie senkrecht gewählt werden.

Bei geeigneter Normierung gilt: $A_i^{(\alpha)} A_i^{(\beta)} = A_i'^{(\alpha)} A_i'^{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta}$

Es gilt dann die Vollständigkeitsrelation:

$$\sum_\alpha A_i^{(\alpha)} A_j^{(\alpha)} = \sum_\alpha A_i'^{(\alpha)} A_j'^{(\alpha)} = \delta_{ij}$$

(Denn $a_i = \sum_\alpha A_j^{(\alpha)} a_j A_i^{(\alpha)} = \sum_\alpha A_i^{(\alpha)} A_j^{(\alpha)} a_j$; da a_j beliebig, folgt obiges Resultat.)

Darstellung des Trägheitstensors durch seine Eigenwerte und Eigenvektoren:

$$\Theta_{ij} = \sum_\alpha A_i^{(\alpha)} \Theta_\alpha A_j^{(\alpha)}; \quad \Theta_{ij}' = \sum_\alpha A_i'^{(\alpha)} \Theta_\alpha A_j'^{(\alpha)}$$

Trägheitsellipsoid: Einen symmetrischen Tensor kann man durch die Fläche $\Theta_{ij} x_i x_j = 1$ charakterisieren. Diese Fläche ist ein Ellipsoid, das im Hauptachsensystem die Form

$$\Theta_1 x_1^2 + \Theta_2 x_2^2 + \Theta_3 x_3^2 = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1 \quad \therefore a_\alpha \equiv \sqrt{\frac{1}{\Theta_\alpha}} \text{ annimmt.}$$

Liegen die Massenpunkte des starren Körpers nicht alle auf einer Achse, so ist Θ_{ij} positiv definit, und alle Θ_α sind positiv.

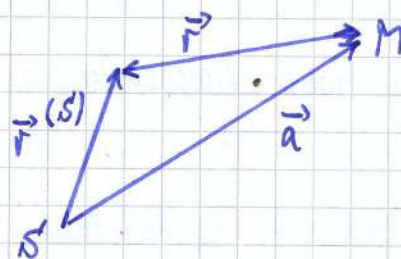
Änderung des Bezugspunktes: Gewöhnlich bezieht man Θ auf den Schwerpunkt. Möchte man Θ um einen anderen Punkt M , der die Koordinaten a_i habe, berechnen, so bekommt man:

$$\vec{r} = \vec{r}(S) - \vec{a} \quad \text{oder} \quad x'_{\alpha i} = x_{\alpha i}^{(S)} - a_i$$

$$x'_{\alpha i} x'_{\alpha j} = x_{\alpha i}^{(S)} x_{\alpha j}^{(S)} - a_i x_{\alpha j}^{(S)} - a_j x_{\alpha i}^{(S)} + a_i a_j$$

und wegen $\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha i}^{(S)} = 0$ folgt:

$$\underline{\underline{\Theta'_{ij} = \Theta_{ij}^{(S)} + m(a_i a_j \delta_{ij} - a_i a_j)}} \quad \Theta_{\text{Massenpunkt}} \text{ bezüglich } M$$



Satz von Steiner: Der Trägheitstensor um einen beliebigen Punkt ist gleich dem Trägheitstensor im Schwerpunkt, vermehrt um den Trägheitstensor der im Schwerpunkt vereinigt gedachten gesamten Masse des Körpers hinsichtlich des Bezugspunktes M : $\Theta_M = \Theta_S + \Theta_{\text{Massenpunkt}}$

Berechnung des Trägheitstensors: Bei der Berechnung von Θ und der Hauptträgheitsachsen nutzt man die Symmetrie des Körpers aus. Da bei einer Symmetrieebene das Trägheitsellipsoid wieder in sich selbst übergehen muss, folgt:

Körper besitzt eine Symmetrieebene (Bsp. Stuhl!): der Schwerpunkt liegt in dieser Ebene.

Eine Hauptträgheitsachse steht senkrecht auf dieser Ebene, die beiden anderen liegen in dieser Ebene $\Rightarrow$

Körper besitzt eine Symmetrieachse: der Schwerpunkt muss auf der Achse liegen.

Die Symmetrieachse muss Hauptträgheitsachse sein. Ist die Symmetrieachse mind. dreizählig, so besitzen die zur Symmetrieachse ~~gehörigen~~ senkrechten Hauptträgheitsachsen gleiche Eigenwerte. Die anderen Hauptträgheitsachsen können dann beliebig gewählt werden, solange sie senkrecht zur Symmetrieachse stehen.

Auch Körper ohne Symmetrien besitzen Hauptträgheitsachsen, die man berechnen kann.

Beispiele: (1.) Homogene Vollkugel (homogen: $\rho = \text{const.}$)

Jede Achse durch Mittelpunkt ist Symmetrieachse. Daher kann jede Achse Hauptträgheitsachse sein $\Rightarrow$ nur möglich, wenn Trägheitstensor proportional dem Einheitsensor ist:

$$\Theta'_{ij} = \Theta \delta_{ij} \text{ hat in jedem gedrehten System dieselbe Gestalt } \Rightarrow \Theta'_{ij} = \Theta \delta_{ij}$$

Berechnung von Θ'_{ij} : $\Theta'_{ii} = \Theta \delta_{ii} = \Theta \cdot 3$ Spur

$$\begin{aligned} \leadsto \Theta \delta_{ii} &= \rho \int (x'_1 x'_1 \cdot 3 - x'_i x'_i) dV' = 2\rho \int x'_i x'_i dV' \\ &= 2\rho \int_0^R \int_{\Omega} r^2 r^2 dr d\Omega = 2\rho \cdot 4\pi \int_0^R r^4 dr = \frac{8\pi \rho R^5}{5} \leadsto \Theta = \frac{8\pi \rho R^5}{15} \end{aligned}$$

$$\Theta = \frac{2}{5} R^2 \frac{4\pi}{3} R^3 \rho \equiv \frac{2}{5} m R^2$$

$$\underline{\underline{\Theta'_{ij} = \frac{2}{5} m R^2 \delta_{ij}}}$$

(2.) Quader mit Kantenlängen a_1, a_2, a_3

Jeweils zweizählige Symmetrieachse fallen mit x'_1, x'_2, x'_3 Achsen zusammen.

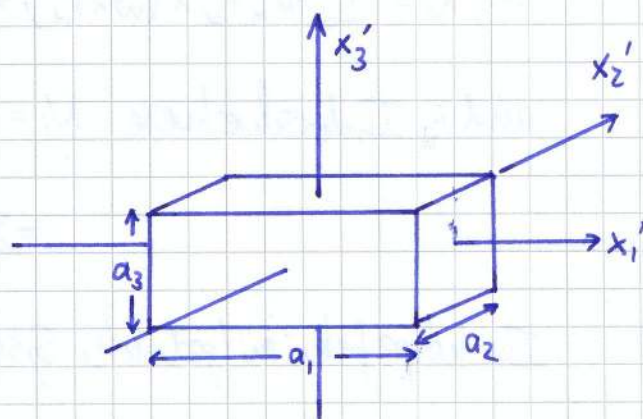
$$\underline{\underline{\Theta'_{11}}} = \rho \int_{-a_1/2}^{a_1/2} \int_{-a_2/2}^{a_2/2} \int_{-a_3/2}^{a_3/2} (x'^2_2 + x'^2_3) dx'_1 dx'_2 dx'_3$$

$$= \rho a_1 \left\{ \underbrace{\left[\frac{x'^3_2}{3} \right]_{-a_2/2}^{a_2/2}}_{a_2^3/12} \cdot a_3 + \underbrace{\left[\frac{x'^3_3}{3} \right]_{-a_3/2}^{a_3/2}}_{a_3^3/12} \cdot a_2 \right\} = \rho a_1 a_2 a_3 \left(\frac{a_2^2}{12} + \frac{a_3^2}{12} \right) = \underline{\underline{\frac{m}{12} (a_2^2 + a_3^2)}}$$

$$\text{analog } \Theta'_{22} = \frac{m}{12} (a_1^2 + a_3^2); \quad \Theta'_{33} = \frac{m}{12} (a_1^2 + a_2^2).$$

Spezialfall Kubus: $a_1 = a_2 = a_3 = a \leadsto \Theta'_{ij} = \frac{m}{6} a^2 \delta_{ij}$ isotrop

wie Vollkugel mit $R = \sqrt{5/12} a$.



3.) Drehimpuls, Drehmoment und Bewegungsgleichung. Grundgleichungen sind analog den Ergebnissen bei Systemen von Massenpunkten: $\vec{N} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{R}_{\alpha} \times \vec{\ddot{R}}_{\alpha}$ Drehimpuls
Drehmoment: $\vec{M} = \sum_{\alpha} \vec{R}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}$; Drehimpulssatz: $\vec{N} = \vec{\dot{M}}$.

Der Bezugspunkt, wie wir gesehen haben, ist beliebig. Mit dem Schwerpunkt als Bezugspunkt:

$$\frac{d}{dt} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \dot{\vec{r}}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}$$

$$\vec{N}_S = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \dot{\vec{r}}_{\alpha}$$

$$\vec{M}_S = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}$$

$$\dot{\vec{N}}_S = \vec{M}_S.$$

Unterdrücken wir Index S und benutzen, dass in S $\dot{\vec{r}}_{\alpha} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}$

$$\Rightarrow \vec{N} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha}^2 \vec{\omega} - \vec{r}_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} \cdot \vec{\omega}))$$

$$\text{und in Inderschreibweise } N_i = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha k} x_{\alpha l} \omega_j - x_{\alpha i} (x_{\alpha j} \omega_j))$$

$$= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha k} x_{\alpha l} \delta_{ij} - x_{\alpha i} x_{\alpha j}) \omega_j = \Theta_{ij} \omega_j$$

Im körperfesten mitgedrehten System:

$$N'_i = \sum_{\alpha} (x'_{\alpha k} x'_{\alpha l} \delta_{ij} - x'_{\alpha i} x'_{\alpha j}) \omega'_j m_{\alpha} = \Theta'_{ij} \omega'_j$$

$$\Rightarrow N_i = \Theta_{ij} \omega_j = \frac{\partial T_{\text{rot}}}{\partial \omega_i} ; N'_i = \Theta'_{ij} \omega'_j = \frac{\partial T_{\text{rot}}}{\partial \omega'_i}$$

Der Drehimpulssatz darf in Inderschreibweise nur in System II benutzt werden, er gilt i. allg. nicht in System III:

$$M_i = \dot{N}_i = \frac{d}{dt} (\Theta_{ij} \omega_j).$$

Aber: im System II ist Θ_{ij} i. allg. eine Funktion der Zeit. $\Rightarrow M_i = \dot{N}_i$ umschreiben für III:
Beschreibe Dile (Drehensor) die Drehung des Körpers:

$$x'_i = D_{ik} x_{ik} ; x_i = D_{ki} x'_{ik} \quad D_{ji} = (D^{-1})_{ij}$$

$$M'_i = D_{ik} M_{ik} ; M_i = D_{ki} M'_{ik}$$

$$N'_i = D_{ik} N_{ik} ; N_i = D_{ki} N'_{ik}$$

$$\Rightarrow M_i = \dot{N}_i \text{ wird zu } D_{hi} M_i' = \frac{d}{dt} (D_{hi} N_i') = D_{hi} \dot{N}_i' + D_{hi} N_i' \quad (*)$$

$$\dot{N}_i' = \frac{d}{dt} (\Theta_{ij}' \omega_j') = \Theta_{ij}' \dot{\omega}_j' \quad (\text{da } \dot{\Theta}_{ij}' = 0)$$

Zeitliche Änderung des Drehimpulstensors: mit $\vec{r} = \vec{r}_\alpha$ und $x_i = x_{\alpha i}$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \text{d.h.} \quad \dot{x}_i = \epsilon_{ijk} \omega_j x_k = y_i$$

$$\leadsto \frac{d}{dt} (D_{hi} x_{\alpha i}') = D_{si} y_s' \quad \text{aus Einsetzen der Trafo Gleichungen}$$

$$\leadsto \frac{d}{dt} (D_{hi} x_{\alpha i}') = D_{si} \epsilon_{sjk}' \omega_j' x_{\alpha k}' \quad \text{wobei } \epsilon_{ijk} \text{ ein invariantes Tensor ist.}$$

Ist $x_{\alpha i}'$ die Koordinate eines Punktes des Körpers $\leadsto \dot{x}_{\alpha i}' = 0$

$$\Rightarrow D_{hi} x_{\alpha i}' = D_{si} \epsilon_{sjk}' \omega_j' x_{\alpha k}' \quad \text{muss für jedes } x_{\alpha k}' \text{ gelten}$$

$$\Rightarrow \underline{D_{hi} = D_{si} \epsilon_{sjk}' \omega_j'}$$

Einsetzen in (*) liefert:

$$D_{hi} M_{\alpha i}' = \cancel{D_{hi} M_{\alpha i}'} \quad \begin{matrix} \nearrow k \\ \nearrow p \end{matrix} \quad \begin{matrix} \nearrow j \\ \nearrow l \end{matrix} \quad \begin{matrix} \nearrow \omega_j' \\ \nearrow \omega_l' \end{matrix} \quad \begin{matrix} \nearrow \Theta_{\alpha l}' \omega_l' \\ \nearrow \Theta_{\alpha j}' \omega_j' \end{matrix}$$

Indextausch

$$\Rightarrow M_{\alpha i}' = \epsilon_{\alpha ijp} \Theta_{pl}' \omega_j' \omega_l' + \Theta_{\alpha j}' \dot{\omega}_j'$$

$\Rightarrow$ Eulersche Kreisgleichungen:

$$M_i' = \Theta_{ij}' \dot{\omega}_j' + \epsilon_{ijk} \Theta_{\alpha l}' \omega_j' \omega_l'$$

Wählt man beim körperfesten System als Koordinatensystem das Hauptachsensystem, so erhält man wegen:

$$M_1' = \Theta_1' \dot{\omega}_1' + \underbrace{\epsilon_{123}}_1 \Theta_3' \omega_2' \omega_3' + \underbrace{\epsilon_{132}}_{-1} \Theta_2' \omega_3' \omega_2' \text{ usw.}$$

und $\Theta_\alpha' = \Theta_\alpha$ die Eulerschen Gleichungen im Hauptachsensystem:

$$M_1' = \theta_1 \dot{\omega}_1' + (\theta_3 - \theta_2) \omega_2' \omega_3'$$

$$M_2' = \theta_2 \dot{\omega}_2' + (\theta_1 - \theta_3) \omega_3' \omega_1'$$

$$M_3' = \theta_3 \dot{\omega}_3' + (\theta_2 - \theta_1) \omega_1' \omega_2'$$

Für $\theta_3 \neq \theta_2 \neq \theta_1 \neq \theta_3$ sind diese Gleichungen immer nichtlinear.

4.) Anwendungen und Spezialfälle.

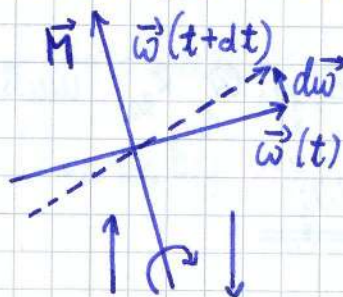
(1.) Isotropes Trägheitstensor $\Theta_{ij} = \Theta \delta_{ij} = \theta_{ij}'$

$$\leadsto M_i = \frac{d}{dt} (\Theta \delta_{ij} \omega_j) = \frac{d}{dt} (\Theta \omega_i) = \Theta \frac{d\omega_i}{dt}, \text{ symbolisch } \vec{M} = \Theta \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Kräfte freier Fall $\vec{M} = 0$: $\vec{\omega} = \text{const.}$ die Drehachse ändert sich nicht

$$\vec{M} \neq 0: d\vec{\omega} = \frac{\vec{M}}{\Theta} dt$$

Drehrichtung weicht senkrecht
zum Kräftepaar aus:



(2.) Eulersche Gleichungen im Hauptachsensystem für den kräftefreien Fall:

$$\theta_1 \neq \theta_2 \neq \theta_3 \neq \theta_1$$

$$\leadsto \theta_1 \dot{\omega}_1' + (\theta_3 - \theta_2) \omega_2' \omega_3' = 0$$

$$\theta_2 \dot{\omega}_2' + (\theta_1 - \theta_3) \omega_3' \omega_1' = 0$$

$$\theta_3 \dot{\omega}_3' + (\theta_2 - \theta_1) \omega_1' \omega_2' = 0$$

} Integration führt auf elliptische Funktionen.

Rotation um Hauptträgheitsachsen: z.Bsp. $\omega_1' = \text{const.}$, $\omega_2' = \omega_3' = 0$ ist sicher möglich. Frage: sind Bewegungen stabil? Betrachte Rotation um x_1' -Achse und kleine Abweichungen $\Delta \omega_1'$, $\Delta \omega_2'$, $\Delta \omega_3'$ um die stationären Werte $\omega_1' \neq 0$, $\omega_2' = \omega_3' = 0$. Wir berücksichtigen nur Terme 1. Ordnung. $\Rightarrow$

$$\theta_1 \Delta \dot{\omega}_1' = 0$$

$$\theta_2 \Delta \dot{\omega}_2' + (\theta_1 - \theta_3) \omega_1' \Delta \omega_3' = 0$$

$$\theta_3 \Delta \dot{\omega}_3' + (\theta_2 - \theta_1) \omega_1' \Delta \omega_2' = 0$$

Elimination von $\Delta \omega_3'$ aus letzten beiden Gleichungen:

$$\Delta \ddot{\omega}_2' + \frac{\omega_1'^2}{\Theta_3 \Theta_2} (\Theta_1 - \Theta_3)(\Theta_1 - \Theta_2) \Delta \omega_2' = 0 \text{ und identische Gl. für } \Delta \omega_3'$$

$\Rightarrow$ Stabil, falls $(\Theta_1 - \Theta_3)(\Theta_1 - \Theta_2) > 0$ denn hier nur oszillierende Terme $\Rightarrow$ beschränkt

Instabil $(\Theta_1 - \Theta_3)(\Theta_1 - \Theta_2) < 0$ hier Term $\propto e^{\sqrt{\dots} t}$ exponentielles Anwachsen

Stabil also, falls Θ_1 das grösste Trägheitsmoment: $\Theta_1 > \Theta_3, \Theta_2$ oder wenn es das kleinste ist: $\Theta_1 < \Theta_2, \Theta_3$. Die Bewegung um die Achse mit dem mittleren Trägheitsmoment ist instabil. (Gleich Momente s.u.).

(3.) Freie Rotation um eine allgemeine Achse. sei x_i' die Rotationsachse $\Rightarrow$

$$\Theta_{ij} \dot{\omega}_j' + \varepsilon_{ijk} \Theta_{kl} \dot{\omega}_l \omega_j' = 0 \text{ zusammen mit E-Satz } T = \frac{1}{2} \Theta_{ij} \dot{\omega}_i' \dot{\omega}_j'$$

liegen für $\vec{\omega}' = (\omega_1', 0, 0)$, $\omega_1' \neq 0$ und damit $\dot{\omega}_1' = 0 \wedge \underline{\varepsilon_{i1k} \Theta_{kl} = 0}$

kann nur befriedigt werden, falls $\Theta_{21} = \Theta_{31} = 0$, d.h., wenn die Deviationsmomente verschwinden, also x_i' -Achse eine Hauptträgheitsachse ist!

Aufreie Rotation um x_i' -Achse auch bei vorhandenen Deviationsmomenten möglich $\Rightarrow$ Zwangsmomente auf Lager.

(4.) Freie Rotation des symmetrischen Kreisel.

(a.) Behandlung im körperfesten System Symmetrisch: zwei Hauptträgheitsmomente gleich,

z.Bsp.: $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_{\perp}$; $\Theta_3 = \Theta_{\parallel}$.

$$\text{Energgl.: } \Theta_{\perp} \dot{\omega}_1' = -(\Theta_{\parallel} - \Theta_{\perp}) \omega_2' \omega_3'$$

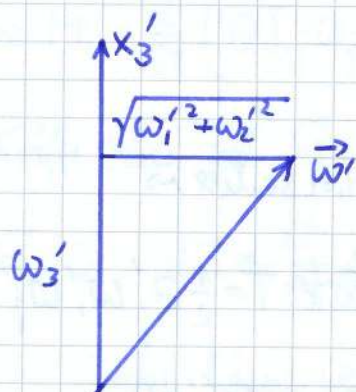
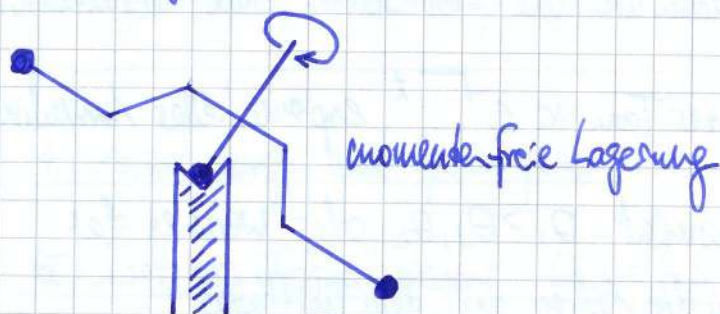
$$\Theta_{\perp} \dot{\omega}_2' = (\Theta_{\parallel} - \Theta_{\perp}) \omega_1' \omega_3'$$

$$\Theta_{\parallel} \dot{\omega}_3' = 0$$

72 $\Rightarrow \dot{\omega}_3 = \text{const.}; \dot{\omega}_1' = -\Omega \omega_2'$ und $\dot{\omega}_2' = \Omega \omega_1' \therefore \Omega \equiv \frac{\Theta_{11} - \Theta_{11}}{\Theta_{11}} \omega_3'$

$\Rightarrow$ allg. Lösung $\omega_1' = A \cos(\Omega t + \varphi), \omega_2' = A \sin(\Omega t + \varphi)$

$\Rightarrow$ Bewegung immer stabil



Winkelgeschwindigkeitsvektor läuft um die Figurenchse mit Winkelgeschw. Ω

Anwendung auf Erde: $\frac{\Theta_{11} - \Theta_{11}}{\Theta_{11}} \approx \frac{1}{300}$

$\omega_3' = \frac{2\pi}{\text{Tag}}$

$\Rightarrow \frac{2\pi}{\Omega} = 300 \text{ Tage (Foucault'sche Periode)}$

Tatsächlicher Wert: 433 Tage (Chandler'sche Periode) wegen elastischer Deformation der Erde.

(b.) Behandlung im raumfesten System II

Symmetrieachse sei $\vec{d}$ mit $|\vec{d}| = 1$.

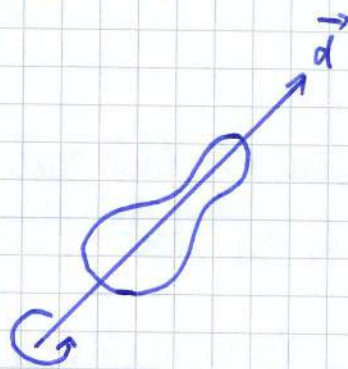
Mit Eigenwerten & Eigenvektoren:

$\Theta_{ij} = \Theta_{11} (A_i^{(1)} A_j^{(1)} + A_i^{(2)} A_j^{(2)}) + \Theta_{11} A_i^{(3)} A_j^{(3)}$

und $A_i^{(3)} = d_i$

$\Rightarrow \Theta_{ij} = \Theta_{11} \underbrace{(A_i^{(1)} A_j^{(1)} + A_i^{(2)} A_j^{(2)} + A_i^{(3)} A_j^{(3)})}_{\delta_{ij}} + (\Theta_{11} - \Theta_{11}) \underbrace{A_i^{(3)} A_j^{(3)}}_{d_i d_j}$

$\Rightarrow \Theta_{ij} = \Theta_{11} \delta_{ij} + (\Theta_{11} - \Theta_{11}) d_i d_j$



Zeitabhängigkeit von Θ_{ij} im raumfesten System $\bar{I}$ ist in $d_i = d_i(t)$ enthalten

$$\Rightarrow \text{Drehimpuls } N_i = \Theta_{ij} \omega_j = \Theta_{\perp} \omega_i + (\Theta_{\parallel} - \Theta_{\perp}) d_j \omega_j d_i$$

$$\text{bzw.: (I) } \vec{N} = \Theta_{\perp} \vec{\omega} + (\Theta_{\parallel} - \Theta_{\perp}) (\vec{d} \vec{\omega}) \vec{d} \quad \therefore \quad \vec{N} = \text{const. Kräftefreier Kreis}$$

Zusammen mit (II) $\dot{\vec{d}} = \vec{\omega} \times \vec{d}$ können wir die Bewegung bestimmen:

(I): $\vec{N}, \vec{\omega}, \vec{d}$ in einer Ebene!

$$\text{Ausserdem gilt } \frac{d}{dt} \vec{N} \vec{d} = \vec{N} \dot{\vec{d}} = (\Theta_{\perp} \vec{\omega} + (\Theta_{\parallel} - \Theta_{\perp}) (\vec{d} \vec{\omega}) \vec{d}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{d}) = 0$$

$$\leadsto \vec{N} \vec{d} = |\vec{N}| \cdot \cos \vartheta = \text{const.} \quad (*)$$

$$\vec{N} \vec{d} = \Theta_{\perp} \vec{\omega} \vec{d} + (\Theta_{\parallel} - \Theta_{\perp}) (\vec{d} \vec{\omega}) \vec{d} = \Theta_{\parallel} (\vec{\omega} \vec{d}) = \text{const.}$$

$$\leadsto \vec{\omega} \vec{d} = |\vec{\omega}| \cos \alpha = \text{const.} \quad (**)$$

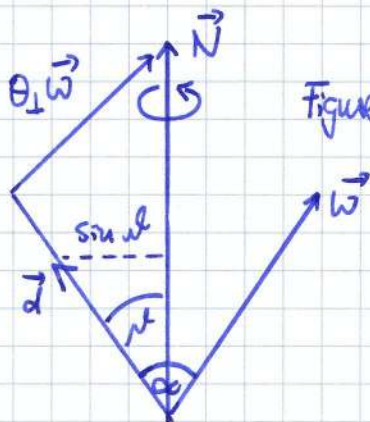
$$\dot{\vec{d}} = \vec{\omega} \times \vec{d} = \frac{\vec{N} - (\Theta_{\parallel} - \Theta_{\perp}) (\vec{d} \vec{\omega}) \vec{d}}{\Theta_{\perp}} \times \vec{d} = \frac{\vec{N} \times \vec{d}}{\Theta_{\perp}}$$

$\vec{\omega} \text{ aus (I)}$

$$\leadsto |\dot{\vec{d}}| = |\vec{\omega}| \sin \alpha = \frac{|\vec{N} \times \vec{d}|}{\Theta_{\perp}} = \frac{|\vec{N}|}{\Theta_{\perp}} \sin \vartheta = \text{const.}$$

$$\underline{|\vec{\omega}| \sin \alpha = \text{const.}} \quad (***)$$

Aus den drei Glu. (*) folgt damit: $|\vec{\omega}| = \text{const.}, \alpha = \text{const.}, \vartheta = \text{const.}$



Figurenachsen $\vec{d}$ und $\vec{\omega}$ drehen sich um den räumlich konstanten $\vec{N}$ mit Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_{F.A.} = \frac{|\dot{\vec{d}}|}{\sin \vartheta} = \frac{|\vec{N}|}{\Theta_{\perp}}$$