

Zentraler Grenzwertsatz.

189

Gegeben seien die Zufallsgrößen $X_1, X_2, \dots, X_N$, die unabhängig sein sollen und durch die gleiche Zufallsverteilung w bestimmt seien (iid - independent, identically distributed random variables). Mittelwert & Varianz der X_N sollen existieren.

Was ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Summe Y im Limes $N \rightarrow \infty$:

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_N ?$$

Beispiele: • Systeme nicht-wechselwirkender Teilchen: $X_i = \text{Einkleinergie}$
 $Y = \text{Gesamtenergie aller Teilchen}$

• Random walk: $X_i = \text{Displacement beim } i. \text{ Schritt}$; $Y = \text{Position nach } N \text{ Schritten}$

$$\text{Betrachte } z = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i (X_i - \langle X \rangle) = \frac{1}{\sqrt{N}} (Y - N \langle X \rangle).$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow w_z(z) &= \int dx_1 dx_2 \dots dx_N w(x_1) w(x_2) \dots w(x_N) \delta\left(z - \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{\sqrt{N}} + \sqrt{N} \langle X \rangle\right) \\ &= \int \frac{d\hbar}{2\pi} e^{i\hbar z} \int dx_1 dx_2 \dots dx_N w(x_1) w(x_2) \dots w(x_N) \exp\left(-\frac{i\hbar(x_1 + x_2 + \dots + x_N)}{\sqrt{N}} + i\hbar \sqrt{N} \langle X \rangle\right) \\ &\quad \text{denn } \int dx e^{-i\hbar x} \delta(x - f(x)) = \int dx e^{-i\hbar f(x)} \\ &\quad \leadsto \delta(x - f(x)) = \frac{1}{2\pi} \int d\hbar e^{i\hbar x} \int dx e^{-i\hbar f(x)} \\ &\downarrow \\ &= \int \frac{d\hbar}{2\pi} e^{i\hbar z + i\hbar \sqrt{N} \langle X \rangle} \left[\chi\left(\frac{\hbar}{\sqrt{N}}\right) \right]^N \quad \therefore \chi(\hbar) = \int e^{-i\hbar x} w(x). \end{aligned}$$

Kummulantentwicklung von $\chi(\hbar)$: $\chi(\hbar) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i\hbar)^n}{n!} C_n\right)$ Kummulant

$$C_1 = \langle X \rangle, \quad C_2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2, \quad C_3 = \langle X^3 \rangle - 3\langle X^2 \rangle \langle X \rangle + 2\langle X \rangle^3 \dots$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow w_z(z) &= \int \frac{d\hbar}{2\pi} e^{i\hbar z + i\hbar \sqrt{N} \langle X \rangle - i\hbar \sqrt{N} \langle X \rangle - \frac{1}{2} \hbar^2 (\underbrace{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}_{(\Delta X)^2}) + \dots \hbar^3 N^{-1/2} + \dots} \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int \frac{d\hbar}{2\pi} e^{i\hbar z - \frac{1}{2} \hbar^2 (\Delta X)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi (\Delta X)^2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2(\Delta X)^2}\right). \end{aligned}$$

mit Def. von Y folgt: $w_Y(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N (\Delta X)^2}} \exp\left(-\frac{(Y - N \langle X \rangle)^2}{2(\Delta X)^2 N}\right)$

Zentraler Grenzwertsatz

Gaussverteilung ist universell, da wir keine Voraussetzung an w haben, außer dass

1. & 2. Moment existieren.

$$\langle Y \rangle = N \langle X \rangle \quad \& \quad \frac{\Delta Y}{\langle Y \rangle} = \frac{\Delta X \sqrt{N}}{N \langle X \rangle} = \frac{\Delta X}{\langle X \rangle \sqrt{N}} \text{ relative Schwankung} \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$$

Verallgemeinerter zentraler Grenzwertsatz (Lévy 1915):

Grenzverteilung der Summe von iid Zufallsvariablen, bei denen 1. & 2. Moment nicht notwendigerweise existieren, hat die folgende charakteristische Funktion:

$$w(h) = \exp(-\sigma^\alpha |h|^\alpha)$$

$\alpha=2$: Gaußverteilung

$\alpha=1$: Cauchyverteilung $w(x) = \frac{1}{\pi(\alpha^2 + x^2)}$ (Lorentzverteilung)

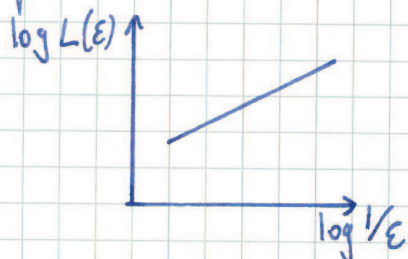
$$0 < \alpha < 2: w(x) \sim \frac{A}{|x|^{1+\alpha}} \Rightarrow \langle x^2 \rangle \rightarrow \infty$$

$$\langle |x|^q \rangle < \infty \quad \forall \quad q < \alpha.$$

Divergenz von $\langle x^2 \rangle$ bewirkt eine Skalenfreiheit des Prozesses.

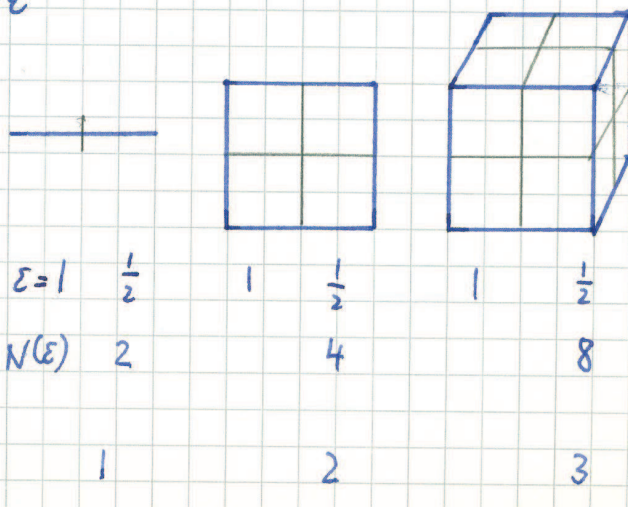
Skalenfreiheit in der Praxis

• Länge der Küste von UK, Norwegen... hängt von der Länge des Maßstabs ab: $L = L(\varepsilon)$.

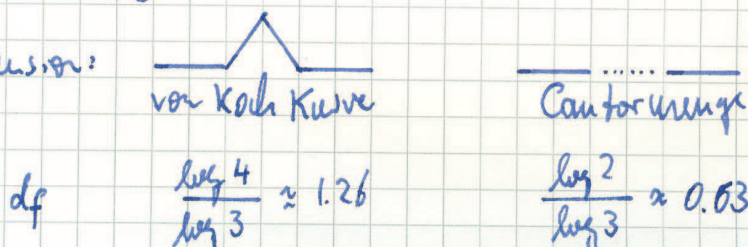


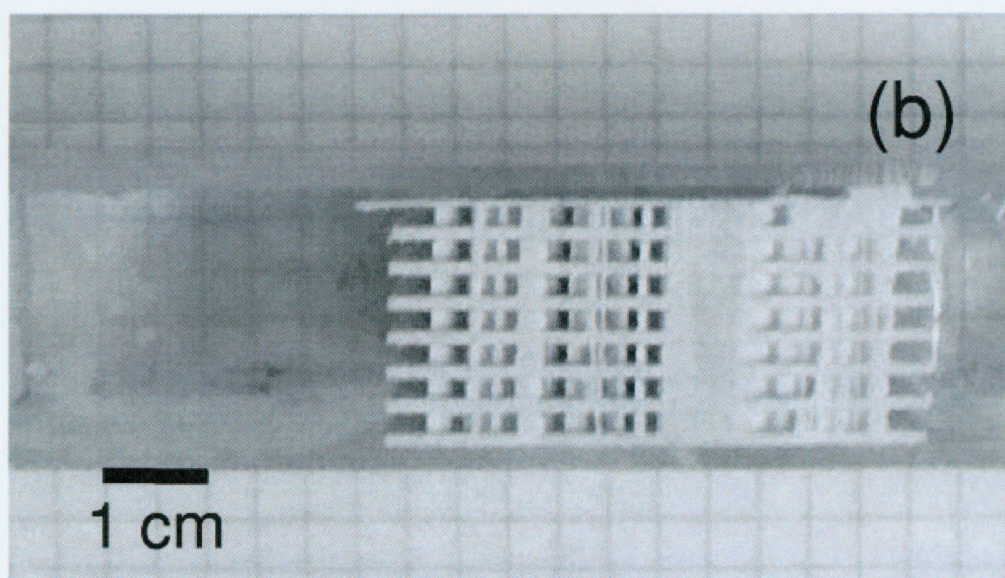
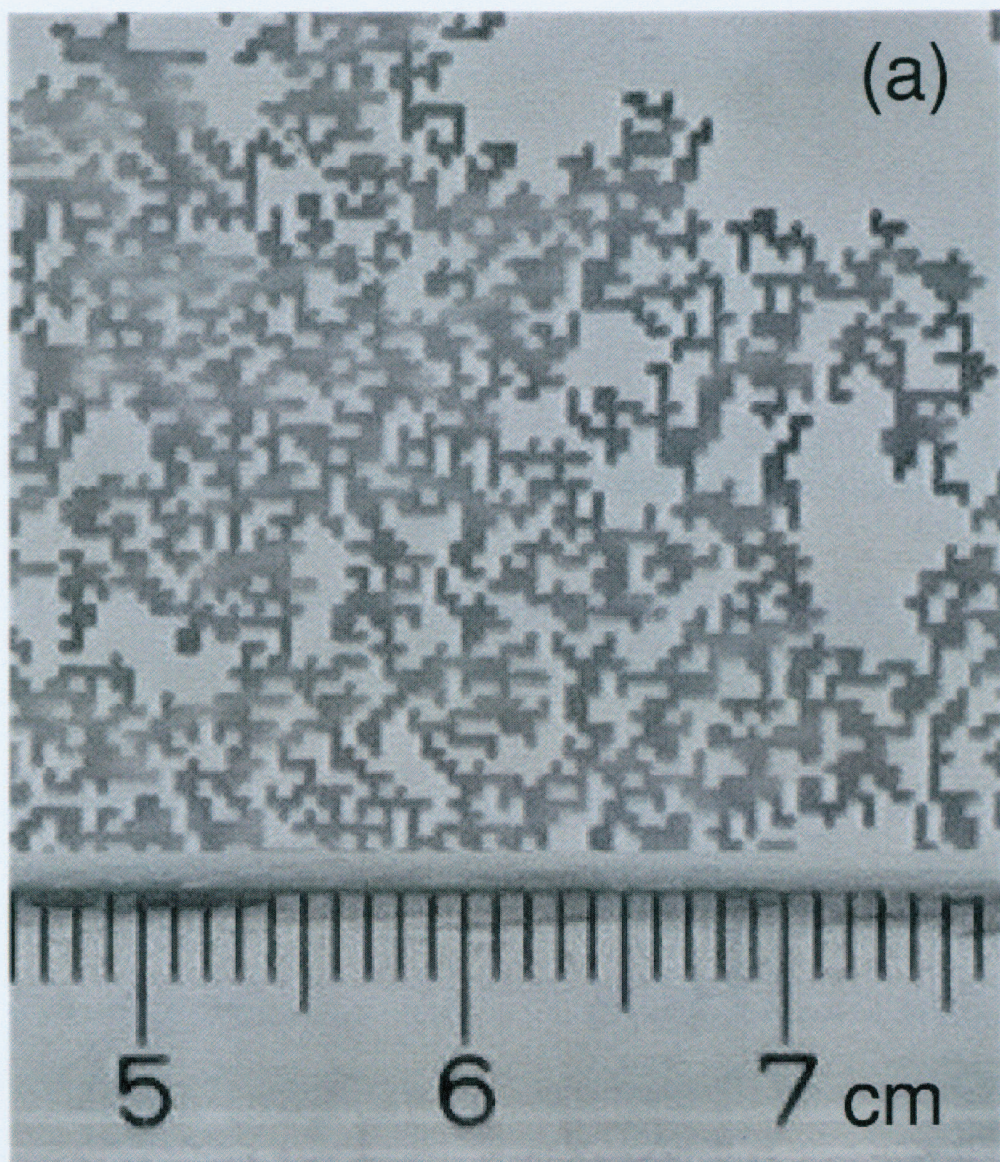
• Fraktale:

- ganze Dimensionen:



- fraktale Dimension:





mass of ∞ cluster $M(L) \sim L^{df}$; correlation length $\xi \sim |p - p_c|^{-\nu}$