

Druck, Dichte, Temperatur.

127

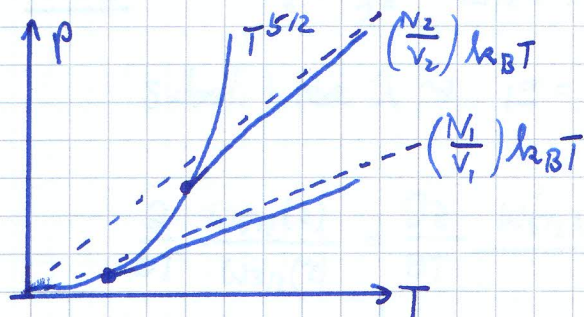
feste Dichte unterhalb kritisches Temp. $T_c \leadsto z=1$ und

$$p = \frac{\lambda_{BT}}{\lambda^3} \omega_{5/2}(1) = \frac{\lambda_{BT}}{\lambda^3} \zeta(5/2) \Rightarrow p \sim T^{5/2} \text{ unabhängig von Gasdichte!}$$

$$T > T_c: \bar{n} \lambda^3 = \omega_{3/2}(z) \wedge p = \frac{\lambda_{BT}}{\lambda^3} \omega_{5/2}(z)$$

$$T \gg T_c \Rightarrow z \rightarrow 0 \leadsto \omega_n(z) \sim z \Rightarrow p = \frac{\lambda_{BT}}{\lambda^3} z = \frac{\lambda_{BT}}{\lambda^3} (\bar{n} \lambda^3) = \frac{\lambda_{BT} N}{V}$$

klass. ideales Gas



feste Temperatur: kleine Dichte $\leadsto z \rightarrow 0 \Rightarrow pV = N \lambda_{BT}$ klass. id. Gas

hohe Dichte: $z=1$ wird erreicht $\Rightarrow p = \frac{\lambda_{BT}}{\lambda^3} \zeta(5/2)$ Druck bleibt für weitere Erhöhung der Dichte konstant

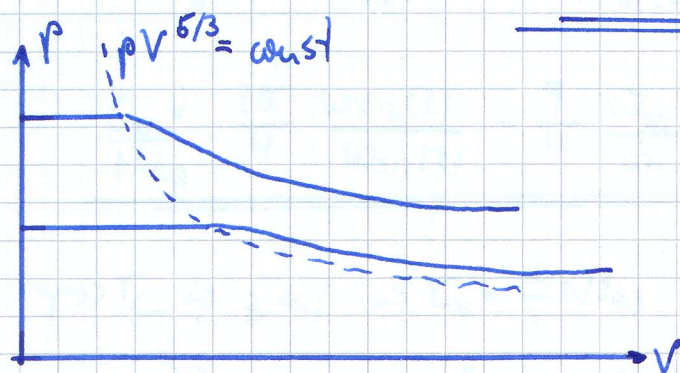
Gleichzeitig wird Anteil der Teilchen im Grundzustand erhöht $\Rightarrow$ Phasenübergang, Bose-Einstein-Kondensation. NB: Kondensation im Impulsraum.

Grenzcurve, bei der Besetzung des Grundzustands makroskopisch relevant wird:

N, T sollen konst. sein $\leadsto$ kritisches Volumen V_c , bei dem $z=1$ erreicht wird:

$$\bar{n} \lambda^3 = \zeta(3/2) \Rightarrow V_c = N \lambda^3 / \zeta(3/2)$$

$$\text{mit } p = \lambda_{BT} \zeta(5/2) / \lambda^3 \Rightarrow p V_c^{5/3} = \frac{h^2}{2\pi m} \frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)} N^{5/3}$$



Kalorische Zustandsgleichung

Mit Definition $C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{V,N}$ und für $T < T_c$ konstante Fugazität z

$$\rightarrow \text{mit } z \ll 1 \text{ folgt } E = \frac{3}{2} \frac{V k_B T}{\lambda^3} \zeta(5/2)$$

$$\Rightarrow C_V = \frac{15}{4} \frac{\zeta(5/2)}{\bar{n} \lambda^3} \sim T^{3/2}$$

$$\underline{T > T_c}: E = \frac{3}{2} \frac{V k_B T}{\lambda^3} \omega_{5/2}(z) \quad \wedge \quad N = \frac{V}{\lambda^3} \omega_{3/2}(z)$$

$$\text{substituiere } \lambda \leadsto E = \frac{3}{2} N k_B T \frac{\omega_{5/2}(z)}{\omega_{3/2}(z)} \leadsto \frac{C_V}{N k_B} = \frac{3}{2} \frac{\omega_{5/2}(z)}{\omega_{3/2}(z)} + \frac{3}{2} T \frac{\partial}{\partial T} \frac{\omega_{5/2}(z)}{\omega_{3/2}(z)}$$

$$\frac{\partial}{\partial T} \frac{\omega_{5/2}(z)}{\omega_{3/2}(z)} = \frac{\partial z}{\partial T} \frac{\omega'_{5/2}(z) \omega_{3/2}(z) - \omega'_{3/2}(z) \omega_{5/2}(z)}{(\omega_{3/2}(z))^2}$$

$$\downarrow \quad z \frac{\partial \omega_n(z)}{\partial z} = \omega_{n-1/2}(z)$$

$$= \frac{\partial z}{\partial T} \left\{ \frac{1}{z} \left(1 - \frac{\omega_{1/2}(z) \omega_{5/2}(z)}{(\omega_{3/2}(z))^2} \right) \right\}$$

$$\text{ausserdem: } \frac{\partial}{\partial T} \omega_{3/2}(z) = \frac{\partial}{\partial T} \bar{n} \lambda^3 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial T} \omega_{3/2}(z) = \frac{\partial z}{\partial T} \omega'_{3/2}(z) = \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial T} \omega_{1/2}(z)$$

$$\text{und } \frac{\partial}{\partial T} \bar{n} \lambda^3 = -\frac{3}{2T} \bar{n} \lambda^3 = -\frac{3}{2T} \omega_{3/2}(z) \quad \lambda = h^2 / (2\pi m k_B T)$$

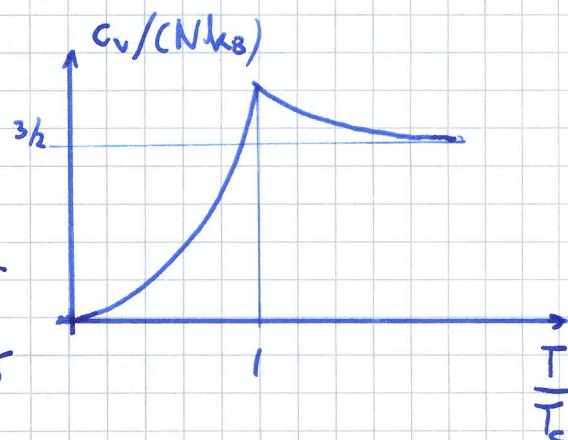
$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial T} = -\frac{3z}{2T} \frac{\omega_{3/2}(z)}{\omega_{1/2}(z)}$$

$$\Rightarrow \frac{C_V}{N k_B} = \frac{3}{2} \frac{\omega_{5/2}(z)}{\omega_{3/2}(z)} - \frac{9}{4} \frac{\omega_{3/2}(z)}{\omega_{1/2}(z)} \left(1 - \frac{\omega_{1/2}(z) \omega_{5/2}(z)}{(\omega_{3/2}(z))^2} \right)$$

$$\underline{\underline{\frac{C_V}{N k_B} = \frac{15}{4} \frac{\omega_{5/2}(z)}{\omega_{3/2}(z)} - \frac{9}{4} \frac{\omega_{3/2}(z)}{\omega_{1/2}(z)}}}$$

$$T \gg T_c \leadsto z \ll 1 \Rightarrow C_V = \frac{3}{2} N k_B \text{ klassischer Erg.}$$

$$z=1, \text{ i.e. } T \rightarrow T_c^+: \frac{C_V}{N k_B} = \frac{15}{4} \frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)} \approx 1.925$$



4.6. Das ideale Fermigas. $-\infty < \mu < \infty$ wie gesehen

jeder Zustand maximal einfach besetzt, allerdings $\neq$ Entartung durch inneren Freiheitsgrad, von denen ϵ_n unabhängig ist. z.Bsp. Spin $s > 0 \Rightarrow$ Entartung $\bar{g} = 2s+1$

Gesamtteilchenzahl: $N = \sum_n \bar{n}_n = \int_0^\infty g(\epsilon) \frac{d\epsilon}{z^{-1}e^{\beta\epsilon} + 1} + \mathcal{O}(\dots)$ max $\bar{g}$ Teilchen im Grundzustand, die im thermodyn. Limes irrelevant werden

$$\epsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \& \quad g(\epsilon) = \bar{g} \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \epsilon^{1/2}$$

Großes Potential: $\mathcal{Q} = -\ln Z = -\int_0^\infty g(\epsilon) \ln(1 + ze^{-\beta\epsilon}) d\epsilon \stackrel{\text{P.I.}}{=} -\bar{g} \frac{4\pi V}{3h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{3/2} d\epsilon}{1 + z^{-1}e^{\beta\epsilon}}$

Innere Energie: $E = \bar{g} \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{5/2} d\epsilon}{1 + z^{-1}e^{\beta\epsilon}}$

mit $\mathcal{G}_n(z) \equiv \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{x^{n-1} dx}{z^{-1}e^x + 1}$

$\Rightarrow N = \bar{g} \frac{V}{\lambda^3} \mathcal{G}_{3/2}(z); \quad \mathcal{Q} = -\bar{g} \ln Z \frac{V}{\lambda^3} \mathcal{G}_{5/2}(z); \quad E = \frac{3\bar{g} \ln Z}{2} \frac{V}{\lambda^3} \mathcal{G}_{5/2}(z)$

Eigenschaften von $\mathcal{G}_n(z)$.

ist $z < 1$: $\frac{1}{z^{-1}e^x + 1} = ze^{-x} \frac{1}{1 + ze^{-x}} \stackrel{z < 1 \& x \geq 0}{=} ze^{-x} \sum_{l=0}^\infty (-ze^{-x})^l = \sum_{l=1}^\infty (-1)^{l-1} z^l e^{-lx}$

$\Rightarrow \mathcal{G}_n(z) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \sum_{l=1}^\infty (-1)^{l-1} z^l e^{-lx} x^{n-1} dx = \sum_{l=1}^\infty (-1)^{l-1} \frac{z^l}{l^n} \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-y} y^{n-1} dy$
 $\downarrow$
 $= \sum_{l=1}^\infty (-1)^{l-1} \frac{z^l}{l^n}$

$\Rightarrow \mathcal{G}_n(z) \approx z, \quad z \ll 1$

$z \gg 1$: $y = \ln z = \beta\mu \Rightarrow \Gamma(n) \mathcal{G}_n(z) = \int_0^\infty x^{n-1} \left(\theta(y-x) + \left(\frac{1}{e^{x-y} + 1} - \theta(y-x) \right) \right) dx$
 $\downarrow$
 $= \frac{y^n}{n} + I_{n-1} \therefore$
 $I_{n-1} \equiv \int_0^\infty x^{n-1} \left(\frac{1}{e^{x-y} + 1} - \theta(y-x) \right) dx$

mit $x = y\eta$: $\frac{I_{n-1}}{y^n} = \int_0^\infty \eta^{n-1} \left(\frac{1}{e^{y(\eta-1)} + 1} - \theta(1-\eta) \right) d\eta$



— $\gamma=5$
 $\gamma=100$

reduzierte Fermi-verteilung $\frac{1}{e^{\gamma(\eta-1)}+1}$

ist γ sehr gross, so ist die Differenz $\frac{1}{e^{\gamma(\eta-1)}+1} - \Theta(1-\eta)$ sehr klein & $\frac{I_{n-1}}{\gamma^n} \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} 0$
 $\rightarrow$ Reihenentwicklung in γ^{-1}

Dazu starten wir mit
$$I_n = \int_0^\gamma x^n \left(\frac{1}{e^{x-\gamma}+1} - 1 \right) dx + \int_\gamma^\infty x^n \frac{1}{e^{x-\gamma}+1} dx$$

$$= - \int_0^\gamma \frac{x^n}{e^{x-\gamma}+1} dx + \int_\gamma^\infty \frac{x^n}{e^{x-\gamma}+1} dx$$

$$= - \int_0^\gamma \frac{(y-u)^n}{e^u+1} du + \int_0^\infty \frac{(u+y)^n}{e^u+1} du$$

$\sim \int_0^\infty \dots du$

$$= \int_0^\infty \frac{(y+u)^n - (y-u)^n}{1+e^u} du \stackrel{\xi \equiv y^{-1}}{=} y^n \int_0^\infty \frac{(1+\xi u)^n - (1-\xi u)^n}{1+e^u} du \stackrel{= \zeta(\xi)}{=}$$

$\zeta(\xi)$ entwickeln: k. Abl.: $\zeta_m^{(k)}(0) = \frac{2m!}{(m-k)!} \int_0^\infty \frac{u^k}{1+e^u} du$, k ungerade
 $= 0$ k gerade

verbleibt: $L_k = \int_0^\infty \frac{u^k}{1+e^u} du$

für $u \geq 0$ gilt $\frac{1}{1+e^u} = \frac{e^{-u}}{1+e^{-u}} = e^{-u} \sum_{l=0}^\infty (-1)^l e^{-lu} = \sum_{l=0}^\infty (-1)^{l-1} e^{-lu}$

$$\Rightarrow L_k = \sum_{l=1}^\infty (-1)^{l-1} \int_0^\infty u^k e^{-lu} du = \sum_{l=1}^\infty (-1)^{l-1} \frac{1}{l^{k+1}} \int_0^\infty v^k e^{-v} dv \stackrel{\Gamma(k+1)}{=} \Gamma(k+1)$$

$$= k! \sum_{l=1}^\infty \frac{(-1)^{l-1}}{l^{k+1}} = k! \left(\sum_{l=1}^\infty \frac{1}{l^{k+1}} - 2 \sum_{l=1}^\infty \frac{1}{(2l)^{k+1}} \right) \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \zeta(k+1)$$

$$= k! \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \zeta(k+1)$$

$\Rightarrow \forall k$ ungerade ist $\zeta_m^{(k)}(0) = \frac{2m!k!}{m-k!} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \zeta(k+1)$

$$\Rightarrow \gamma_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_n^{(k)}(0)}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{\Gamma(n-2k)} \left(1 - \frac{1}{2^{2k+1}}\right) \psi(2k+2) z^{2k+1}$$

↑
nur ungerade k

$$\Rightarrow I_{n-1} = 2\gamma^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-2k+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{2k-1}}\right) \psi(2k) \gamma^{-2k}$$

Diese Reihe hat Probleme bei der Konvergenz, man kann aber zeigen, dass die erste Kreise eine gute Beschreibung liefern (NB: I_{n-1} existiert):

$$I_{n-1} = \gamma^n \left([n-1] \psi(z) \gamma^{-2} + \frac{7(n-1)(n-2)(n-3)}{4} \psi(4) \gamma^{-4} + \dots \right)$$

$$\Rightarrow G_n(z) \approx \frac{(\log z)^n}{\Gamma(1+n)} \left(1 + n(n-1) \psi(z) (\log z)^{-2} + \dots \right) \quad (*)$$

Außerdem gilt mit

$$\begin{aligned} \underline{\underline{z \frac{\partial G_n(z)}{\partial z}}} &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} z \frac{\partial}{\partial z} \frac{x^{n-1} dx}{z^{-1} e^x + 1} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1} z^{-1} e^x}{(z^{-1} e^x + 1)^2} dx \\ &\stackrel{\text{P.I.}}{=} \frac{1}{\Gamma(n)} \left\{ \left[-\frac{x^{n-1}}{(z^{-1} e^x + 1)} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{(n-1) x^{n-2} z^{-1} e^x}{(z^{-1} e^x + 1)^2} dx \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} \frac{(n-1) x^{n-2}}{z^{-1} e^x + 1} dx = \frac{1}{\Gamma(n-1)} \int_0^{\infty} \frac{x^{n-2}}{z^{-1} e^x + 1} dx = \underline{\underline{G_{n-1}(z)}} \end{aligned}$$

Thermische Zustandsgleichung.

$$\text{Mit } Q = -pV; \quad N = \frac{V}{\lambda^3} \sigma_{3/2}(z); \quad Q = -\frac{V}{\lambda^3} \ln T \frac{V}{\lambda^3} \sigma_{5/2}(z); \quad E = \frac{3}{2} \frac{k_B T V}{\lambda^3} \sigma_{5/2}(z)$$

$$\Rightarrow pV = \frac{2}{3} E = N k_B T \frac{\sigma_{5/2}(z)}{\sigma_{3/2}(z)}$$

Mit $\bar{n} = N/V$ folgt ebenfalls $\frac{V}{\lambda^3} \sigma_{3/2}(z) = \bar{n} \lambda^3$. Wir hatten $\sigma_n(z) = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} z^l / l^n$

$$\Rightarrow z - \frac{z^2}{2^{3/2}} \approx \frac{1}{\bar{n}} \bar{n} \lambda^3 \quad \text{bzw.} \quad z \approx \frac{1}{\bar{n}} \bar{n} \lambda^3 + \frac{z^2}{2^{3/2}}$$

$$\text{nulle \& erste Näherung: } z^{(0)} = \frac{1}{\bar{n}} \bar{n} \lambda^3; \quad z^{(1)} = \frac{1}{\bar{n}} \bar{n} \lambda^3 + \frac{1}{2^{3/2}} \left[\frac{1}{\bar{n}} \bar{n} \lambda^3 \right]^2$$

Aus $z = e^{\beta \mu}$ folgt in dieser Näherung:

$$\mu = k_B T \log z \approx k_B T \left(\log \left(\frac{1}{\bar{n}} \bar{n} \lambda^3 \right) + \frac{1}{2^{3/2}} \frac{1}{\bar{n}} \bar{n} \lambda^3 \right) \quad \text{mit } \log(1+x) \approx x$$

Diese Näherung von z verlangt offenbar $\bar{n} \lambda^3 \ll 1$ oder wegen $\lambda \sim T^{-1/2}$ bedeutet das hohes T und/oder niedriges $\bar{n}$. Für solche kleine z hatten wir $g_n(z) \approx z$

$\Rightarrow pV \approx N k_B T$ verdünntes Fermigas bei hoher Temperatur wie ideales Gas.

Mit $z^{(1)}$ lässt sich auch μ korrekter angeben.

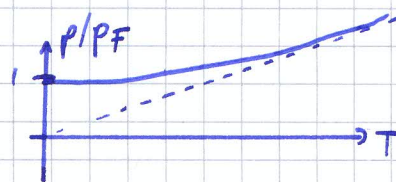
Umgekehrter Fall mit $\bar{n} \lambda^3 \gg 1$ folgt mit (*) (vorige Seite):

$$pV \approx N k_B T \frac{\Gamma(1+3/2) (\log z)^{5/2}}{\Gamma(1+5/2) (\log z)^{3/2}} = \frac{2}{5} N k_B T \log z = \frac{2}{5} N \mu$$

Um μ zu bestimmen, benutzen wir (*) und $\bar{g}_{5/2}(z) = \bar{n} \lambda^3 \Rightarrow \bar{n} \lambda^3 \approx \bar{g} \frac{(\log z)^{3/2}}{\Gamma(1+3/2)}$

$$\Rightarrow \log z = \frac{\mu}{k_B T} \approx \left(\frac{\Gamma(5/2) \bar{n} \lambda^3}{\bar{g}} \right)^{2/3} = \left(\frac{\Gamma(5/2) \bar{n}}{\bar{g}} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2\pi m k_B T} \quad \text{mit } \lambda = \sqrt{h^2 / 2\pi m k_B T}$$

$$\Rightarrow \mu \approx \left(\frac{3\bar{n}}{4\pi \bar{g}} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2m} \quad \text{mit } \Gamma(5/2) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}$$



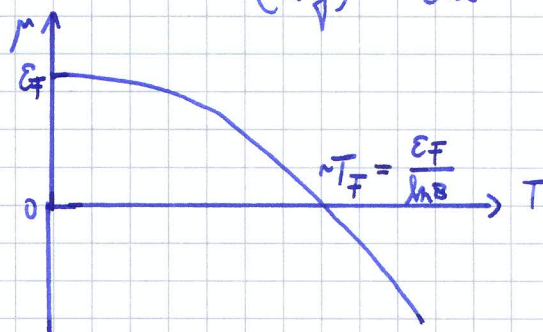
Damit folgt $p = p_F = \frac{2}{5} \left(\frac{\Gamma(5/2)}{\bar{g}} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2\pi m} \bar{n}^{5/3} \approx \bar{n}^{5/3}$ unabh. von T!

$\Rightarrow$ Alle Zustände unterhalb Fermienergie ϵ_F sind besetzt und damit tragen sie zum Druck bei, anders als bei Bosonen.

$T=0!$
Mit $N = \int_0^{\epsilon_F} g(\epsilon) d\epsilon = \bar{g} \frac{4\pi V}{3h^3} (2m)^{3/2} \epsilon_F^{3/2} \Rightarrow \epsilon_F = \left(\frac{3\bar{n}}{4\pi \bar{g}} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2m}$

Also $\lim_{T \rightarrow 0} \mu = \epsilon_F$

$\bar{n} \lambda^3 \gg 1$ wird als entartetes Fermigas bezeichnet.



Wärmekapazität des Fermigases.

$g_n(z)$ hat identische Rekursionsregel wie g_n ; pV und E sind unter Vertauschung von g_n und g_n für Fermionen & Bosonen identisch $\Rightarrow$

$$\frac{C_V}{N k_B} = \frac{15}{4} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \frac{9}{4} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}$$

Für hohe $T \Rightarrow \bar{n} \lambda^3 \ll 1$ gilt $C_V = \frac{3}{2} N k_B$ klassisches Erg.