Mathematik I für Chemiker (Bachelor)

Übung 12

1. Gegeben sind die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 7 & 9 & 8 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 5 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

sowie die Skalare $s = 12, t = 8$.

a) Berechnen Sie $s \cdot \mathbf{A} + t \cdot \mathbf{B}$!

b) Berechnen Sie $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{A} - \mathbf{B}$!

2. Gegeben sind die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & x \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

a) Matrizen mit der Eigenschaft $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ heißen *idempotent*. Berechnen Sie $\mathbf{A}^2$! Lässt sich x derart festlegen, dass $\mathbf{A}$ idempotent ist?

b) Gilt für idempotente Matrizen auch $\mathbf{A}^{97} = \mathbf{A}$? Begründung!

c) Berechnen Sie $\mathbf{B}^2$!

3. Gegeben Sind die Spaltenvektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^7$ (7 Komponenten) und $\vec{d} \in \mathbb{R}^5$ (5 Komponenten). Welche der Produkte $\vec{a}^{\,T} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{b}^{\,T}$, $\vec{a} \cdot \vec{b}^{\,T} \cdot \vec{c}$, $\vec{a}^{\,T} \cdot \vec{d}$ und $\vec{a} \cdot \vec{d}^{\,T}$ sind sinnvoll und von welchem Typ ist gegebenenfalls das Ergebnis?

bitte wenden

4. a) Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Produkte $\vec{a}^{\,T} \cdot \vec{b}$, $\vec{b}^{\,T} \cdot \vec{a}$, $\vec{a} \cdot \vec{b}^{\,T}$, $\vec{b} \cdot \vec{a}^{\,T}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}^{\,T}$ und $\vec{c} \cdot \vec{b}^{\,T}$!

b) Gegeben sind die Matrix und die Vektoren

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Produkte $\vec{x}^{\,T} \cdot \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^T \cdot \vec{x}$, $\mathbf{A} \cdot \vec{y}$, $\vec{y}^{\,T} \cdot \mathbf{A}^T$, $\vec{x}^{\,T} \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{y}$ und $\vec{y}^{\,T} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \vec{x}$!

5. Gegeben sind die Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{C}^3$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3i \\ 4+i \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} i \\ 2-i \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie damit das verallgemeinerte Skalarprodukt für komplexe Vektoren!

6. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Skalarprodukts der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ den Winkel $\alpha = \angle(\vec{a}, \vec{b})$, den die beiden Vektoren einschließen! Verifizieren Sie dann durch Nachrechnen die Beziehung $|\,\vec{a} \times \vec{b}\,| = |\,\vec{a}\,|\,|\,\vec{b}\,| \sin\alpha$!