Mathematik II für Chemiker (Bachelor)

Übung 1

1. Berechnen Sie von den folgenden Matrizen **A, B, C, D, E** und **F** den Wert ihrer Determinanten! Sind die Matrizen regulär oder singulär?
   Welchen Rang besitzen sie?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 8 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Es bezeichne i die imaginäre Einheit. Welche der folgenden Matrizen sind unitär, welche sind orthogonal, welche sind hermitesch? Geben Sie im Fall einer unitären bzw. orthogonalen Matrix die inverse Matrix an!

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Gegeben ist die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -6 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 6 & -6 \\ 4 & 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie die Determinante der Matrix durch Anwendung des Laplaceschen Entwicklungssatzes (Entwicklung von **A** nach der 1. Zeile)!

bitte wenden

4. Bestimmen Sie die inverse Matrix $\mathbf{F}^{-1}$ der Matrix $\mathbf{F}$ aus Aufgabe 1.

5. Es sei $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

   a) Stellen Sie die Abbildungsmatrix $\mathbf{A}$ auf, die $\underline{x}$ um 45° um die x-Achse dreht!
   b) Bestimmen Sie den Bildvektor $\underline{x'} = \mathbf{A}\ \underline{x}$!
   c) Geben Sie die inverse Abbildungsmatrix an! Welche geometrische Operation bewerkstelligt diese?
   d) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $\mathbf{B}$, die $\underline{x}$ um 120° um die z-Achse dreht!
   e) Berechnen sie $\mathbf{B}^2$ und $\mathbf{B}^3$!
   f) Verifizieren Sie durch Nachrechnen, daß $\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}^{-1}$ ist.

6. Gegeben ist der Punkt $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Führen Sie eine Drehspiegelung aus, mit Drehung um die z-Achse um den Winkel $\phi = \pi/4$ und anschließender Spiegelung an der σ_{xy}-Ebene. Geben Sie die Abbildungsmatrix $\mathbf{A}$ an und berechnen Sie den Bildpunkt $\underline{x'} = \mathbf{A}\underline{x}$.