Potsdamer Zentrum für empirische Inklusionsforschung (ZEIF), 2018, Nr. 1

# „5 + 5 ist 10 und dann noch 3 dazu“ -

## Mathematische Lösungsstrategien von Kindern

*Luisa Wagner*
*Universität Potsdam*

**Zusammenfassung:**

Der Bereich „Zahlen und Operationen“ stellt einen Kernbereich im Mathematikunterricht dar. In jedem Schuljahr sollen die Kompetenzen darin erweitert werden. Der Umgang mit Zahlen und Rechenoperationen beginnt jedoch bereits im Kindergartenalter, wenn die Zahlwortreihe aufgesagt oder später erste Rechenaufgaben gelöst werden. Um die Kompetenzen ausbauen zu können, sind nicht nur ein differenzierter Zahlbegriff und tragfähige Mengen- und Zahlvorstellungen notwendig, sondern auch flexibel anwendbare Lösungsstrategien. Dieser Artikel soll einen Überblick über Lösungsstrategien der Addition und Subtraktion geben und diese entwicklungstheoretisch einordnen. Abschließend werden daraus Konsequenzen für den Unterricht gezogen.

**Schlagwörter:** Lösungsstrategien, Grundrechenarten, Mathematik, Grundschule,

**Abstract:**

Numbers and operations constitute an important part in mathematics education. In each school year, the competencies should be expanded in this area. However, dealing with numbers and arithmetic operations already begins in kindergarten, when the first arithmetic problems are solved. In order to be able to develop the competencies, not only differentiated and adaptable concepts of numbers and quantity are necessary, but also applicable strategies for solving arithmetic tasks. This article will give an overview of these strategies and classify them according to a theoretical development model. Finally, consequences for teaching are drawn.

**Keywords:** solving strategies, elementary arithmetic, mathematics, primary school

## Einleitung

Im Mathematikunterricht der Grundschule spielt der Bereich der „Zahlen und Operationen“ eine wichtige Rolle (Grassmann, Eichler, Mirwald, & Nitsch, 2010). Die darin erworbenen Kenntnisse bilden eine wichtige Grundlage für das Mathematiklernen im weiteren Verlauf der Schulzeit. Nur durch die Möglichkeit, auf flexible und nicht-zählende Lösungsstrategien und ausgeprägte Vorstellungen zu verschiedenen Rechenoperationen zurückgreifen zu können, sind die Schülerinnen und Schüler in der Lage, komplexere Aufgaben zu lösen und somit dem weiterführenden Unterricht zu folgen.

Die Entwicklung von Strategien zur Lösung von Rechenaufgaben beginnt bereits im Kindergartenalter. Diese werden dann im Laufe der Schulzeit abhängig vom arithmetischen Konzeptverständnis weiterentwickelt und aus-differenziert. Somit zeigen sich im Unterricht große Unterschiede im Strategierepertoire. Damit der aktuelle Lernstand der Kinder eingeschätzt und eine gezielte Förderung erfolgen kann, ist es wichtig, verschiedene Lösungsstrategien zu kennen und sie entwicklungstheoretisch einordnen zu können.

## Lösungsstrategien im Kontext arithmetischer Kompetenzentwicklung

Im Anfangsunterricht der Grundschule sind mit dem Begriff Rechenoperationen bzw. Operationen die vier Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division gemeint (Krauthausen & Scherer, 2014). Da curricular zuerst die Addition und Subtraktion behandelt werden, sollen diese beiden Operationen hier im Vordergrund stehen.

### Begriffsdefinition

Mit dem Begriff Lösungsstrategien werden die verschiedensten Handlungen hinsichtlich unterschiedlicher Aufgaben bezeichnet. Gaidoschik (2010) definiert Lösungsstrategien als *„die Gesamtheit der beobachtbaren Handlungen und erschließbaren geistigen Akte […], die ein Kind als Mittel anwendet für den Zweck, eine bestimmte Aufgabe zu bewältigen.“* (S. 22)
Bei dieser Definition ist zu beachten, dass sowohl die beobachtbaren äußeren Handlungen als auch die geistigen Prozesse, die von außen nicht einzusehen sind, einbezogen werden. Es kann also auch auf eine Lösungsstrategie geschlossen werden, die das Kind verfolgt, auch wenn es keine beobachtbare Handlung, sondern geistige Aktivitäten ausführt. Weiterhin unterscheidet sich die Definition in dem Sinne von anderen, dass nicht eingegrenzt wird, ob das Problem mithilfe der Strategie richtig gelöst wurde. Entscheidend ist nur, dass eine Strategie zur Anwendung kommt (Gaidoschik, 2010).

Eine solche Lösungsstrategie wird im Zusammenhang mit mathematischen Aufgaben häufig auch als Rechenstrategie bezeichnet. Diese mathematischen Lösungsstrategien werden in zählende Strategien und heuristische Strategien unterschieden.

## Zählende Lösungsstrategien

Bereits ab einem Alter von ca. drei Jahren können Kinder erste Teile bis hin zu größeren Abschnitten der Zahlwortreihe aufsagen (Padberg & Benz, 2011) und diese zum Auszählen einer kleinen Anzahl von Objekten nutzen (Fritz, Ehlert, Ricken, & Balzer, 2017). Zum Zählen gehört in diesem Zusammenhang sowohl das laute als auch das gedankliche Aufsagen der Zahlwortreihe (Gaidoschik, 2010) sowie eine zeitgleiche korrekte Ausführung der 1-zu-1-Zuordnung, also jedem zu zählenden Objekt genau ein Zahlwort zuzuordnen. Abhängig von der Entwicklung der arithmetischen Konzepte (Fritz, Ehlert, Ricken, & Balzer, 2017) eines Kindes, können verschiedene zählende Strategien angewendet werden, die sich jedoch deutlich hinsichtlich ihrer Effizienz und Fehleranfälligkeit unterscheiden. Die Vorstellung der Strategien für die Addition soll anhand der Additionsaufgabe 5 + 8 = 13 erfolgen.

Als Erstes ist das *Vollständige Auszählen* oder auch *Alleszählen* zu nennen. Hierbei handelt es sich um eine der ersten zur Verfügung stehenden Strategien. Sie ist vor allem mit der Nutzung von Materialien z.B. Plättchen, aber auch Fingern, verbunden, denn es werden sowohl die einzelnen Teilmengen (fünf und acht), als auch schließlich die Gesamtmenge immer bei Eins beginnend ausgezählt (Padberg & Benz, 2011). Um diese Strategie anwenden zu können, müssen die Kinder das Prinzip der 1-zu-1-Zuordnung verstanden haben, korrekt umsetzen können und das ordinale Zahlverständnis entwickeln (Fritz u. a., 2017). Dabei verstehen Kinder, dass Zahlen geordnet sind und dass sie in die eine Richtung auf dem Zahlenstrahl (rechts) größer und in die andere Richtung (links) kleiner werden. Kinder verfügen über dieses arithmetische Konzeptverständnis durchschnittlich im Vorschulalter, also dem letzten Kindergartenjahr.

Eine darauf aufbauende Strategie ist das *Weiterzählen*. Es wird nun nicht mehr jede Menge vollständig ausgezählt, sondern ab einer beliebigen Ausgangszahl weiter gezählt (Secada, Fuson, & Hall, 1983). Um zu einem richtigen Ergebnis zu kommen, müssen die Kinder mit dem auf den Summanden folgenden Zahlwort beginnend weiterzählen. Für die Beispielaufgabe bedeutet das, dass die Fünf als Summand erkannt und mit der Sechs beginnend um acht weitergezählt wird. Dabei müssen gleichzeitig zwei Zählreihen organisiert werden: Einerseits die „Weiterzählreihe“ (6, 7, 8, …, 13) und die „Hauptzählreihe“, die anzeigt, wie viele Zahlen weitergezählt werden müssen (1, 2, 3, …, 8) (Gaidoschik, 2010). Dieser Prozess kann mit Hilfsmitteln z.B. den Fingern oder auch in Gedanken stattfinden. Für das Nutzen dieser Strategie ist ein kardinales Zahlverständnis notwendig. Dies meint, dass Kinder verstehen, dass Zahlen auch die Mächtigkeit von Mengen repräsentieren. Sie beginnen zu verstehen, dass Mengen in Mengen enthalten sind und dass die zu zählenden Elemente zu einer Gesamtmenge gehören, die durch Zählen ermittelt wird (Fritz u. a., 2017).

Aufbauend auf dem Verständnis, dass Mengen in Mengen enthalten sind, entwickeln Kinder die Einsicht in das Teil-Teil-Ganze-Konzept. Sie verstehen, dass eine Menge verschieden in Teilmengen zerlegt werden kann und dass Teilmengen und die Gesamtmenge eine Mengenbeziehung darstellen, so dass ausgehend von zwei bekannten (Teil)mengen auf eine unbekannte (Teil)menge geschlossen werden kann. Können Kinder dieses Verständnis aufweisen, dann verstehen sie auch, dass es für das Gesamtergebnis irrelevant ist, ob es 8 + 5 oder 5 + 8 heißt. Mit diesem Wissen ändert sich auch die Strategie des Weiterzählens und Kinder können mit dem größeren Summanden beginnend den kleineren Summanden addieren. Damit Kinder in Schritten zählen können, z.B. in Zweierschritte, benötigen sie zusätzlich zum Teil-Teil-Ganze-Konzept, das relationale Zahlverständnis. Zahlen repräsentieren nun auch einen Abstand zwischen Mengen oder zwischen Zahlen. Nun gelingt auch ein Weiterzählen in größeren Schritten (Kaufmann, 2010; Padberg & Benz, 2011). Mit der Entwicklung des Zahlverständnisses und damit der konzeptuellen Entwicklung im arithmetischen Verständnis des Kindes können effektivere Zählstrategien angewendet werden. Damit finden eine Verkürzung des Zählprozesses und eine Reduktion der Fehleranfälligkeit statt.

Wie für die Addition können auch für die Subtraktion zählende Strategien angewandt werden. Diese werden umso effektiver (Kaufmann, 2010) je weiter das Kind in der Entwicklung des konzeptuellen arithmetischen Verständnisses vorangeschritten ist (Fritz et a. 2017).

Das Pendant des Alleszählens für die Subtraktion ist das *Auszählen*. Dabei wird der Minuend meistens mithilfe von Materialien abgebildet und anschließend der Subtrahend durch Wegnehmen abgezogen (Kaufmann, 2010). Die übrig gebliebene Menge wird ebenfalls gezählt. Hierfür müssen Kinder das ordinale Zahlverständnis verinnerlicht haben (Fritz u. a., 2017).

Als weitere Strategie ist das *Rückwärtszählen* möglich. Dabei wird vom Minuenden ausgehend die Zahlenreihe rückwärts durchgegangen (Kaufmann, 2010). Dafür ist, genau wie beim Weiterzählen, die Koordination zweier Zahlenreihen nötig und das kardinale Verständnis von Zahlen die Grundlage, wenn das Rückwärtszählen direkt vom Minuenden ohne vorheriges auszählen begonnen wird.

Eine andere Vorgehensweise zeigt sich beim *Ergänzen*. Dabei wird vom Subtrahenden ausgehend bis zum Minuenden weitergezählt. Es wird also die Subtraktion in die Addition überführt und es kann somit die Strategie des Weiterzählens angewandt und das Rückwärtszählen umgangen werden. Dies bietet sich allerdings nur bei geringen Abständen zwischen Minuend und Subtrahend an (Schipper, 2009). Für das Ergänzen ist es notwendig, dass die Kinder Additions- und Subtraktionsaufgaben als komplementär, d.h. als sogenannte

„Gegenoperationen“ erkennen und verstehen. Da sich diese Einsicht mit dem Teil-Teil-Ganze-Konzept entwickelt, findet das Ergänzen erst im Zusammenhang mit heuristischen Strategien Anwendung. Wird diese Strategie allerdings im Unterricht explizit vermittelt ohne dass das entsprechende konzeptuelle Verständnis beim Kind vorhanden ist, liegt ein auswendig gelernter und unverstandener Algorithmus vor, der lediglich zum Ziel hat, dass Kinder befähigt werden, richtige Ergebnisse zu ermitteln. Bei einer Vermittlung ohne konzeptuelle Verankerung bleiben Mengenbeziehungen unerkannt, wobei letzteres die Voraussetzung für die Entwicklung von heuristischen Lösungsstrategien ist. Damit werden zählende Rechner in ihrem Zählen gefestigt und eine Ablösung vom Zählen findet möglicherweise nicht statt.

Wie bereits erläutert, bilden diese hier vorgestellten Strategien, mit Ausnahme des Ergänzens, meist die ersten, die bei der Lösung mathematischer Probleme zur Anwendung kommen. Allerdings benutzen auch Erwachsenen diese häufig im Alltag (Padberg & Benz, 2011), obgleich zählende Rechenstrategien sehr fehleranfällig und ineffektiv und dadurch für das Rechnen mit großen Zahlen ungeeignet sind. Die häufigsten Fehler ergeben sich einerseits daraus, dass der Überblick über die zwei benötigten Zählreihen verloren geht und dadurch Elemente doppelt gezählt oder ausgelassen werden, andererseits entstehen für das zählende Rechnen typische Fehler um plus oder minus eins, da die Kinder beim Weiterzählen mit dem Zahlwort des ersten Summanden (bzw. bei der Subtraktion mit dem Zahlwort des Minuenden) und nicht mit dem darauf folgenden beginnen (Schipper, 2009). Deshalb ist es ein wichtiges Ziel des Mathematikunterrichts der Grundschule, den Schülerinnen und Schülern heuristische Lösungsstrategien nahezubringen, was allerdings voraussetzt, ein schrittweises Aufbauen arithmetischer Konzepte in den ersten beiden Grundschuljahren zu fokussieren.

### Heuristische Lösungsstrategien

Als heuristische Strategien werden diejenigen angesehen, die „Einsichten in die Eigenschaften von Addition und Subtraktion (z.B. Assoziativgesetz) […] voraus [setzen], aus denen dann die Lösungen anderer Aufgaben abgeleitet werden.“ (Schipper, 2009, S. 107) Insgesamt handelt es sich bei heuristischen Strategien, um Lösungsprozesse, bei denen die Beziehung zwischen Mengen und Zahlen gesehen und genutzt wird. Dafür ist allerdings ein flexibles Verständnis des Teil-Teil-Ganze-Konzepts die Voraussetzung. Kinder, die Ergebnisse überwiegend zählend ermitteln, verfügen (noch) nicht über genügend Einsicht in das Teil-Teil-Ganze-Konzept und damit in die Beziehungen zwischen Mengen bzw. zwischen Zahlen. Sie werden mit diesem Wissen nicht ausreichend in der Lage sein, heuristische Strategien inhaltlich zu verstehen und diese abhängig von der Anforderung der Aufgabe angemessen einzusetzen.

*Tabelle 1*

Operative Grundaufgaben und Grundstrategien. Nach: Schipper (2009), S. 116.

| Operative Grundaufgaben | | |
|---|---|---|
| Umkehraufgaben | Tauschaufgaben | Nachbaraufgaben |
| 17 – 8<br>17 – 9 | 9 + 8 | 7 + 9<br>9 + 9<br>8 + 8<br>8 + 10 |
| 8 + 2 + 7<br>8 + 10 – 1 | 8 + 8 + 1<br>9 + 9 – 1 | 7 + 10<br>[aus (8 – 1) + (9 + 1)]<br>10 + 7<br>[aus (8 + 2) + (9 – 2)] |
| Schrittweise Rechnen | Verdoppeln | Gegensinniges Verändern |
| Operative Grundstrategien | | |

In der Übersicht (Tab. 1) sind zunächst die drei wichtigsten heuristischen Strategien für die Addition und Subtraktion („Operative Grundstrategien“) zu finden, die im Anfangsunterricht der Grundschule eine große Rolle spielen (Schipper, 2009). Zusätzlich enthält die Übersicht die „Operativen Grundaufgaben“, ebenfalls für Addition und Subtraktion, die für eine Lösung mithilfe heuristischer Strategien benötigt werden. Es wird die Beispielaufgabe 8 + 9 verwendet:

Die gezeigten Grundaufgaben und Grundstrategien sollen nun jeweils erläutert werden:

*Das Verdoppeln nutzen* eignet sich besonders für sogenannte „Fast-Verdoppelungsaufgaben“ (z.B. 3 + 4), da sich diese nur um eins vom Ergebnis der Verdoppelungsaufgabe unterscheiden. Kinder nutzen die Verdopplung 3 + 3 und addieren die noch fehlende Teilmenge 1 (aus 4 = 3 + 1). Damit findet ein ökonomischer und vor allem effektiver Rechenprozess statt (Schipper, 2009). Es werden also meist Verdoppelungsaufgaben, die *Nachbaraufgaben* der eigentlichen Aufgaben sind, genutzt (Padberg & Benz, 2011). Das Pendant für die Subtraktion bildet das *Halbieren*. Diese Strategie ist in der Übersicht von Schipper nicht aufgeführt, da sie sich aus dem Verdoppeln ableiten lässt.

Als weitere Strategie wird das *Schrittweise Rechnen* genannt. Dabei handelt es sich um eine sehr vielseitig ein- und fortsetzbare Strategie (Schipper, 2009). Um schrittweise rechnen zu können, müssen Kinder in der Lage sein, Zahlen flexibel zu zerlegen. Beim *Schrittweisen Rechnen* werden Zahlen sinnvoll zerlegt, um bestimmte Vorteile beim Rechnen zu nutzen, wie z.B. die Nähe zum nächsten Zehner (z.B. 8 + 9 = 8 + 2 + 7). Wie bereits oben schon hingewiesen, müssen Kinder über ein flexibles Teil-Teil-Ganze-Verständnis verfügen, um diese heuristische Strategie anwenden zu können (Fritz u. a., 2017). Dies bedeutet, sie sind in der Lage, Additions- und Subtraktionsaufgaben überwiegend nicht zählend zu lösen und sie können die Nähe von Mengen und Zahlen beschreiben und erklären, somit begründen, warum 3 + 4 das gleiche wie 3 +3 + 1 ist. Das Teil-Teil-Ganze-Konzept stellt insgesamt einen bedeutsamen Entwicklungsschritt dar und bleibt für die gesamte Grundschulzeit ein relevantes Konzept, welches ausgehend im Zahlenraum bis 10 auf weitere Zahlenräume anwendbar gemacht werden muss. Es ist eine wichtige Grundlage für darauf aufbauende Konzepte und damit für das weitere Mathematiklernen. Wie bereits in der Beispielaufgabe sichtbar ist, wird beim schrittweisen Rechnen meist die Fünf oder die Zehn als Rechenvorteil genutzt, wodurch sich das Rechnen mit der *„Kraft der 5“* bzw. der *„Kraft der 10“* etabliert hat (Doschko, 2011).

Als dritte Grundstrategie benennt Schipper das *Gegensinnige Verändern*. Dieser Strategie liegt das Prinzip der Kompensation zugrunde, d.h. die Summe bleibt erhalten, wenn Elemente einer Teilmenge zur anderen verschoben werden (z.B. 6 + 8 = 7 + 7). Dafür ist ein fortgeschrittenes Teil-Teil-Ganze-Verständnis notwendig. Somit kommt diese Strategie im Anfangsunterricht der Grundschule noch nicht so häufig zum Einsatz, ihre Bedeutung nimmt aber im Fortgang des Mathematiklernens zu (Schipper, 2009).

Für die Subtraktion wird hinsichtlich dieser Strategie vom *Gleichsinnigen Verändern* gesprochen, da hierbei sowohl Minuend als auch Subtrahend in die gleiche „Richtung“ verändert werden (z.B. 11 – 5 = 10 – 4 → jede Teilmenge wird um 1 verringert).

## Implikationen für den Unterricht

Die vorgestellten heuristischen Rechenstrategien ermöglichen eine effiziente und weniger fehlerbelastete Lösung von verschiedenen Rechenaufgaben. Um diese Strategien anwenden zu können, benötigen die Schülerinnen und Schüler jedoch die nötigen konzeptuellen Verständnisvoraussetzungen, um eine Einsicht in die zugrundeliegenden Gesetzmäßigkeiten zu erlangen. Erst wenn sie die notwendige konzeptuelle arithmetische Entwicklung vollzogen haben, können sie diese verschiedenen Strategien verstehen, erklären und flexibel einsetzen. Dafür ist ein entwicklungsorientierter differenzierender Mathematikunterricht notwendig, in dem die Kinder beim Erwerb der aufeinander aufbauenden Konzepte (Konzept der Zählzahl mit der 1-zu-1-Zuordnung, Konzept des Ordinalen Zahlenstrahls, Konzept der Kardinalität, Teil-Teil-Ganze-Konzept mit dem Verständnis des Enthaltenseins und der Klasseninklusion von Mengen) unterstützt werden. Dies umfasst einen reflektierten Einsatz unterrichtlich genutzter Materialien (zählend, teilweise zählend, nicht zählend), um mathematische Handlungen zu verdeutlichen sowie um Mengen und deren Beziehungen zueinander zu repräsentieren.

Sind bei den Schülerinnen und Schülern die konzeptuellen Voraussetzungen vorhanden, wird für einen flexiblen Einsatz der verschiedenen Lösungsstrategien außerdem notwendig, dass im Mathematikunterricht die Vielfältigkeit der möglichen Lösungswege einen zentralen Stellenwert bekommt (Padberg & Benz, 2011), das bedeutet weg von einer Ergebnisorientierung hin zu einer Lösungsprozessorientierung. Den Kindern muss die Möglichkeit gegeben werden, verschiedene Lösungsstrategien zu entdecken, kennenzulernen und letztlich zu nutzen. Wichtig ist dabei, das unreflektierte Anwenden auswendig gelernter Algorithmen durch Kommunikation über die Lösungswege aufzudecken und zu überwinden.

Des Weiteren müssen für die vorgestellten Strategien einfache Einspluseins-Aufgaben und Verdoppelungsaufgaben durch häufige Anwendung routiniert werden. Um dies zu ermöglichen, ist ein breiter, insbesondere mengenorientierter (weniger ziffernorientierter) Einsatz von Grundaufgaben im Unterricht notwendig, sodass die Schülerinnen und Schüler in vielen verschiedenen Situationen Mengen-beziehungen erleben, nutzen, bewusst einsetzen und z.B. im Rahmen von Rechengeschichten anwenden lernen.

## Fazit

Der vorliegende Artikel zeigt deutlich, wie facettenreich die Lösungsstrategien für mathematische Grundaufgaben sein können. Vor allem um heuristische Strategien auszubilden, bedarf es bereits einer Vielzahl an Kompetenzen, die im Rahmen aufeinander aufbauender konzeptueller Entwicklungslevels erworben werden. Abhängig vom individuellen konzeptuellen Entwicklungs-stand können nur spezifische Strategien angewendet werden. Daraus ergibt sich die besondere Bedeutung der individuellen Förderung der Kinder im mathematischen Unterricht aber auch bereits vor Beginn der Schulzeit.

Als bedeutendster Faktor für die Ausbildung tragfähiger mathematischer Lösungsstrategien kann die Vielseitigkeit betrachtet werden. Vielseitigkeit ist bereits im vorschulischen Bereich gefragt, um die Kinder mit ganz unterschiedlichen mathematischen Situationen in Kontakt zu bringen. Daran anknüpfend auch Vielseitigkeit im Grundschulunterricht, sowohl in Bezug auf die Vermittlung von Rechenoperationen und ihren Handlungs-situationen, aber vor allem in Bezug auf das Vorstellen und Zulassen ganz unterschiedlicher Lösungswege für ein und dieselbe Aufgabe. Nur durch das Entdecken kreativer Lösungsmöglichkeiten und den Austausch untereinander haben die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, Strategien zu entwickeln, zu überdenken und zu verinnerlichen. Dies sollte gerade in den ersten Schuljahren einen großen Teil des Mathematikunterrichtes ausmachen, um eine feste Grundlage für die darauf aufbauende mathematische Bildung der weiteren Schuljahre legen zu können.

## Literaturverzeichnis

Doschko, D. (2011). *Lösungshäufigkeiten, Rechenmethoden, Lösungswege und Fehler von Erstklässlern beim Bearbeiten von Aufgaben im Zahlenraum bis Zwanzig*. Pädagogische Hochschule Karlsruhe, Hamburg.

Fritz, A., Ehlert, A., Ricken, G., & Balzer, L. (2017). *MARKO-D1+. Mathematik- und Rechenkonzepte bei Kindern der ersten Klassenstufe - Diagnose*. Göttingen: Hogrefe.

Gaidoschik, M. (2010). *Wie Kinder rechnen lernen - oder auch nicht. Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr*. Frankfurt/Main: Peter Lang.

Grassmann, M., Eichler, K. P., Mirwald, E., & Nitsch, B. (2010). *Mathematikunterricht*. Baltmannsweiler: Schneider.

Kaufmann, S. (2010). *Handbuch für die frühe mathematische Bildung*. Braunschweig: Schroedel.

Krauthausen, G., & Scherer, P. (2014). *Einführung in die Mathematikdidaktik* (3. Auflage). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Padberg, F., & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik. Für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung* (4. Auflage). Heidelberg: Spektrum.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematiunterricht an Grundschulen*. Braunschweig: Schroedel.

Secada, W. G., Fuson, K. C., & Hall, J. W. (1983). The Transition from Counting-All to Counting-On in Addition. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(1), 47–57.