

from:

K. P. Müller, ed., Beiträge zum Mathematikunterricht 1997. Vorträge auf der 31. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 3. bis 7. März 1997 in Leipzig. Hildesheim: Franzbecker, pp.545-548.

Heike WIESE, Berlin (e-mail: heike.wiese@rz.hu-berlin.de)

*Komponenten und Entwicklung des Zahlkonzepts - eine Analyse im Lichte neuerer entwicklungspsychologischer und meßtheoretischer Ergebnisse*

## 1 Der konzeptuelle Status von Zahlen

Im Rahmen philosophisch-mathematischer Ansätze steht häufig der kardinale Aspekt natürlicher Zahlen im Vordergrund, auf den sprachlich mit Kardinal-Konstruktionen („sieben Zwerge“) referiert wird. Zahlen werden jedoch nicht nur in solchen quantitativen, sondern auch in ordinalen („der dritte Mann“) oder nominalen Kontexten („Bus Nr.129“) gebraucht. Bei einer umfassenden Analyse des Zahlkonzepts sind daher auch diese Komponenten zu berücksichtigen.

Für eine solche generelle Herangehensweise bietet sich die sog. „Repräsentationstheorie der Messung“ als Ausgangspunkt an: Dieser Ansatz ermöglicht es, die unterschiedlichen Arten der Zahlzuweisung unter einer allgemeinen Definition von „Messung“ zusammenzufassen, nämlich als homomorphe Abbildungen eines empirischen Relativs  $\mathcal{A}$  auf ein numerisches Relativ  $\mathcal{B}$  (vgl. Orth 1983).

Auf dieser Basis lassen sich folgende Arten der „Messung“ - d.h. hier: der Zahlzuweisung - unterscheiden ( $n$  sei jeweils die zugeordnete Zahl,  $u$  das gemessene Objekt):<sup>1</sup>

- *numerische Quantifizierung*:  $n$  zeigt die Mächtigkeit von  $u$  an ( $u$  ist eine Menge);
- *Messung i.e.S.*:  $n$  zeigt die Ausprägung einer extensiven Eigenschaft wie Länge oder Gewicht von  $u$  („direkte Messung i.e.S.“) oder die einer nicht-extensiven Eigenschaft wie Temperatur von  $u$  („indirekte Messung i.e.S.“) an;
- *ordinale Numerierung*:  $n$  zeigt den Rang von  $u$  in einer geordneten Menge  $\alpha$  an;
- *nominale Numerierung*:  $n$  dient als „label“ zur Identifizierung von  $u$  in einer Menge  $\alpha$ .

Man kann die verschiedenen Meßarten danach einteilen, auf welchen Aspekt der natürlichen Zahlen sie rekurrieren. Von der Art und Weise, wie eine Messung auf die jeweilige Relation in  $\mathbb{N}$  Bezug nimmt, hängt dann der Typ der ihr zugrundeliegenden Skala ab.

Der Erwerb der verschiedenen Meßarten führt zur Ausbildung unterschiedlicher numerischer Konzepte, die im folgenden als „Anzahl“, „Rang“, „Maß“ und „Nummer“ analysiert werden. Abb.1 skizziert die Zusammenhänge zwischen Eigenschaften natürlicher Zahlen, Meßarten und numerischen Konzepten:

---

<sup>1</sup> Die relevanten Phänomene können hier nur skizziert werden; für eine ausführliche Diskussion und detaillierte Definitionen der betreffenden Meßarten und der mit ihnen verknüpften numerischen Konzepte vgl. Wiese (1995; 1996).

relevanter Aspekt von <b>N</b>	Skalentyp	Meßart	numerisches Konzept	sprachliches Beispiel
<b>quantitativ</b> (jedes Element von N bildet den Abschluß einer quantitativ definiten Teilsequenz von N)	absolute Skalen	<b>Numerische Quantifizierung</b>	<b>„Anzahl“</b>	<i>sieben Zwerge</i>
	Verhältnisskalen Intervallskalen	<b>Messung i.e.S:</b> (a) direkte Messung (b) indirekte Messung	<b>„Maß“</b>	<i>Eisen von 4 kg Gewicht</i> <i>Wasser von 4<sup>o</sup>C Wärme</i>
<b>ordinal</b> (jedes Element von N hat eine bestimmte Position in N)	Ordinalskalen	<b>Ordinale Numerierung</b>	<b>„Rang“</b>	<i>der dritte Mann</i> <i>die Nr.1 in meinem Leben</i>
<b>nominal</b> (jedes Element von N ist von allen anderen Elementen wohlunterschieden)	Nominalskalen	<b>Nominale Numerierung</b>	<b>„Nummer“</b>	<i>Bus Nr.129</i> <i>Meier zwei</i>

Abb.1

Um in den diskutierten Arten der Messung als Bilder fungieren zu können, müssen Zahlen bestimmte Merkmale aufweisen, die mit den bereits von Dedekind (1887) aufgestellten Bedingungen für ein System  $N$  der natürlichen Zahlen übereinstimmen: (i) Alle Elemente von  $N$  müssen wohlunterschieden sein (*nominaler Aspekt*); (ii)  $N$  muß geordnet sein, jedes Element von  $N$  verweist dementsprechend auf einen bestimmten Rang (*ordinaler Aspekt*) sowie auf eine bestimmte Vorgängermenge einer definiten Quantität (*quantitativer Aspekt*); (iii)  $N$  muß einfach unendlich sein und ist daher für beliebige Erweiterungen verfügbar.

Zahlen sind nach dieser Auffassung nicht bestimmte abstrakte Entitäten, sondern *als Menge der natürlichen Zahlen gebraucht zu werden* ist eine Funktion, die von allen Sequenzen erfüllt werden kann, die die genannten Eigenschaften aufweisen. Die hier entwickelte Analyse ist damit anders als andere Ansätze weder auf den kardinalen noch den ordinalen Aspekt natürlicher Zahlen festgelegt, sondern kann die Verwendung von Zahlen zur Abbildung sowohl quantitativer als auch ordinaler und selbst nominaler Eigenschaften erfassen.

Interessanterweise werden die genannten Bedingungen bereits von den Zählsequenzen natürlicher Sprachen erfüllt (vgl. hierzu auch Wiese 1995; 1996). Für den Bereich der *common sense*-Ontologie können diese daher als Systeme in Zahlfunktion identifiziert

werden; der Erwerb der Zählsequenz bildet eine wesentliche Basis für die Entwicklung numerischer Konzepte.

## 2 Numerische Konzepte

Für das Zahlkonzept kann somit als *Basiskomponente* die Repräsentation einer Sequenz  $N$  von Zählwörtern zugrundegelegt werden, die aufgrund ihrer rekursiven Struktur eine unendliche Menge wohlunterschiedener (sprachlicher) Entitäten bilden. Auf diese Sequenz greifen verschiedene numerische Konzepte zu, die die oben diskutierten Arten der Zahlzuweisung repräsentieren:

- (i) *Anzahl*: Repräsentation einer numerischen Quantität  $n$ ;
- (ii) *Rang*: Repräsentation eines numerisch definiten Stellenwerts  $n$  in einer geordneten Menge  $\alpha$ ;
- (iii) *Nummer*: Repräsentation eines numerischen „labels“  $n$  zur Identifikation eines Objekts in einer Menge  $\alpha$ .

Diese Konzepte können mithilfe der folgenden Definitionen formalisiert werden (für jedes  $x \in N$  sei  $N^x$  jeweils die kleinste Teilmenge von  $N$ , für die gelte: für alle  $v \in N$ :  $v \in N^x$  genau dann, wenn  $v \leq x$ ):

**Definition 1: Anzahlzuweisung (numerische Quantifizierung):**

Sei  $n \in N$  (d. h.  $n$  ist Element der Zählsequenz) und sei  $\alpha$  eine Menge; dann sei  $\mathbf{Anz}(\alpha, n)$  wahr genau dann, wenn es eine eindeutige Abbildung  $f$  von  $\alpha$  auf  $N^n$  gibt.

**Definition 2: Stellenwertzuweisung (ordinale Numerierung)**

Sei  $n \in N$ ; sei  $\alpha$  eine Progression, die durch eine Relation  $R$  geordnet ist, und sei  $a \in \alpha$ ; dann sei  $\mathbf{Nu}_{\text{ord}}(\mathbf{a}, \alpha, n)$  wahr genau dann, wenn eine eindeutige Abbildung  $f$  von  $\alpha$  auf  $N^p$  existiert, so daß  $xRy$  genau dann, wenn  $f(x) < f(y)$  für alle  $x, y \in \alpha$ , und  $f(a) = n$ .

**Definition 3: Zuweisung numerischer „labels“ (nominale Numerierung)**

Sei  $n \in N$ ; sei  $\alpha$  eine Menge und sei  $a \in \alpha$ ; dann sei  $\mathbf{Nu}_{\text{nom}}(\mathbf{a}, \alpha, n)$  wahr genau dann, wenn es eine injektive Funktion  $f$  von  $\alpha$  auf  $N$  gibt und  $f(a) = n$ .

Auf diesen Konzepten findet eine Reihe von Operationen statt:

- Die Konzepte niedriger Anzahlen werden mit frühen, vermutlich angeborenen Konzepten der „Einheit“, „Zweiheit“ und „Dreiheit“ verbunden.
- Neben  $N$  wird ein weiteres System in Zahlfunktion, das System  $Z_i$  von Ziffern, erworben, das mit  $N$  korreliert wird.
- Durch Abstraktion von konkreten Anzahlen entsteht das Konzept „Ganze Zahl<sub>m</sub>“, das Referenten einfacher mathematischer Aussagen repräsentiert.

- Das Konzept „Maß“ repräsentiert die Korrelation von Objekten mit diskreten Mengen von Maßobjekten im Rahmen der Messung i.e.S. und ermöglicht so mittelbar die Verknüpfung von extensiven und nicht-extensiven Eigenschaften mit Anzahlen.

### 3 Struktur des Zahlkonzepts

Diese, miteinander verknüpften und in je unterschiedlicher Weise auf die Zählsequenz bezogenen Komponenten machen die Struktur des Zahlkonzepts aus:

Auf die Repräsentation einer einfach unendlichen Sequenz  $N$  von Zählwörtern greifen verschiedene, miteinander verknüpfte und aufeinander aufbauende numerische Konzepte zu, deren Erwerb jeweils auf dem Erlernen bestimmter Meßverfahren basiert.

Abb. 2 gibt einen abschließenden Überblick über den Aufbau des Zahlkonzepts:

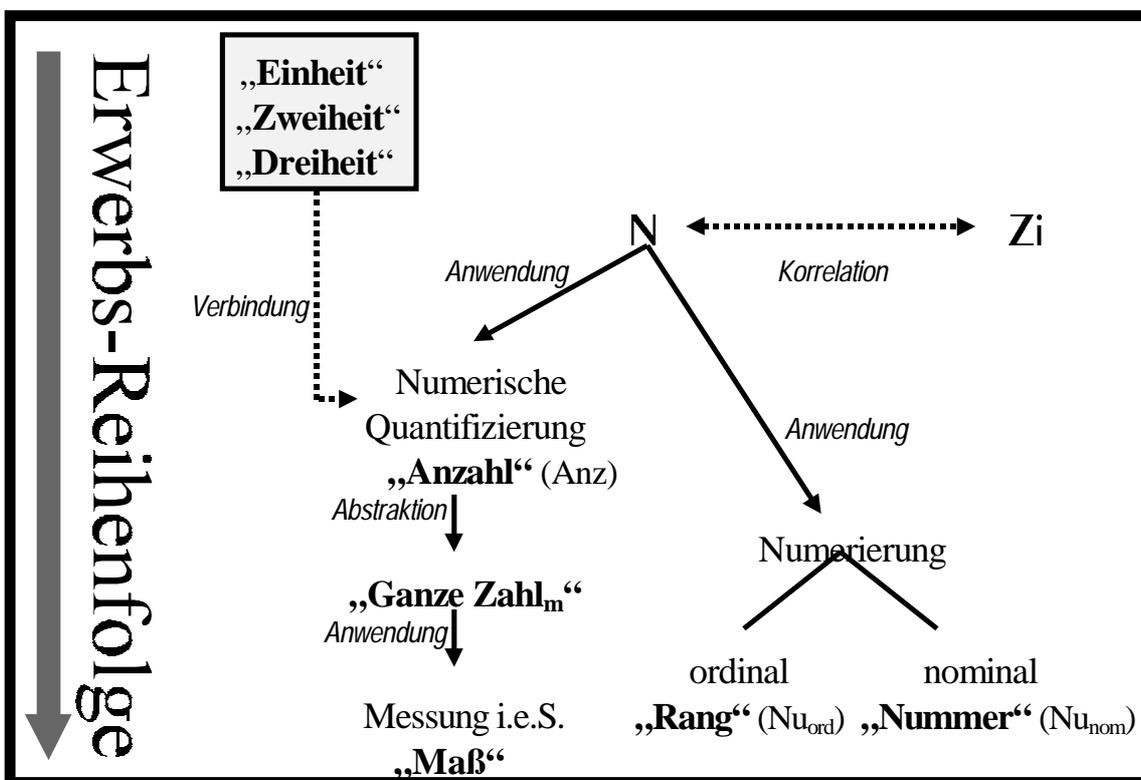


Abb.2

### Literaturnachweis

Dedekind, Richard (1887): Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig: Vieweg.

Orth, Bernhard (1983): Grundlagen des Messens. In: Feger, H. et al. (Hg.): Messen und Testen. Göttingen. S.136-180.

Wiese, Heike (1995): Semantische und konzeptuelle Strukturen von Numeralkonstruktionen. In: Zeitschrift für Sprachwissenschaft 1995/14;2: S.181-235.

- (1996): Zahl und Numerale. Eine Untersuchung zur Korrelation sprachlicher und konzeptueller Strukturen. Diss., Humboldt-Universität Berlin.