



A2 Stern-Gerlach-Versuch

Betreuer: Dr. Peter Frübing ¹

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
1.1	Zusammenfassung	2
1.2	Inhaltliche Schwerpunkte	2
1.3	Experimenteller Aufbau	2
1.4	Aufgaben	2
2	Physikalische Grundlagen	2
3	Meßverfahren	3
3.1	Meßgleichung zur Bestimmung des magnetischen Moments des Kaliumatoms	3
3.2	Berechnung der magnetischen Induktion B und des Feldgradienten $\partial B/\partial z$	9
4	Versuchsdurchführung und -auswertung	12

Das Computer-Programm für die Meßwerterfassung und die Ansteuerung des Schrittmotors wurde von Holger Bernigau, stud. phys., geschrieben.

¹Tel.: (0331) 977-1456, Email: fruebing@uni-potsdam.de, Raum 2.28.0.006.
Versuchsplatz: Raum 2.28.2.046, Tel. 977-5929

1 Einleitung

1.1 Zusammenfassung

Der Stern-Gerlach-Versuch [1] - [4], [8] gehört zu den wichtigsten experimentellen Grundlagen der Quantentheorie. Unter Wahrung des Meßprinzips des historischen Stern-Gerlach-Versuchs wird der Versuch mit modernen technischen Mitteln durchgeführt. Die Richtungsquantelung des magnetischen Moments des freien Elektrons wird nachgewiesen und das magnetische Moment des freien Elektrons bestimmt. Das inhomogene Magnetfeld wird berechnet.

1.2 Inhaltliche Schwerpunkte

- Drehimpuls und magnetisches Moment in der Makro- und Mikrophysik
- Magnetfeld zweier parallel in entgegengesetzten Richtungen fließender Ströme, Amperesches und Biot-Savartsches Gesetz

1.3 Experimenteller Aufbau

- PHYWE Stern-Gerlach-Apparatur, bestehend aus Atomstrahlquelle, magnetischem Analysator und Langmuir-Taylor-Detektor
- Hochvakuumpumpstand (Balzers)
- Picoamperemeter (Keithley 487)
- Schrittmotor mit Steuerung (Dipl.-Ing. Andreas Pucher, Universität Potsdam)

Der Aufbau und die Funktion der einzelnen Komponenten der Stern-Gerlach-Apparatur werden hier nicht beschrieben. Sie sind in [6] dargestellt.

1.4 Aufgaben

- Bestimmen Sie das magnetische Moment des freien Elektrons.
- Berechnen Sie das Magnetfeld zweier parallel in entgegengesetzten Richtungen fließender Ströme.

2 Physikalische Grundlagen

Im Stern-Gerlach-Versuch wird ein einwertiges Metall (hier Kalium) in einem Vakuum-Ofen verdampft, ein feiner Atomstrahl ausgeblendet und durch ein inhomogenes Magnetfeld senkrecht zu dessen Feldlinien geführt. Dabei kommt es wegen der Richtungsquantelung des magnetischen Moments des Kalium-Atoms zu einer Aufspaltung des Strahls in zwei Teilstrahlen. Die Aufspaltung ist symmetrisch, und die Teilstrahlen haben gleiche Intensität.

Aus dem Betrag der Aufspaltung, dem Gradienten der magnetischen Induktion senkrecht zur Strahlrichtung und Geometriedaten kann das magnetische Moment berechnet werden.

Aufgaben zur Vorbereitung auf den Versuch

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Drehimpuls und dem magnetischem Moment eines Elektrons auf einer Kreisbahn?

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Drehimpuls und dem magnetischen Moment einer rotierenden geladenen Kugel vom Radius r mit der Oberflächenladungsdichte $\sigma = Q/(4\pi r^2)$? Die Ladung sei auf der Oberfläche gleichmäßig verteilt und die Kugel rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω .

Geben Sie die Eigenwerte des Spins und des magnetischen Moments des Elektrons an.

Warum wird ein inhomogenes Magnetfeld benötigt?

Warum wählt man ein einwertiges Metall für den Versuch?

Warum funktioniert der Versuch nicht mit freien Elektronen? Begründen Sie anhand einer Abschätzung der auf ein Elektron wirkenden Kräfte.

Wie funktioniert der Langmuir-Taylor-Detektor, mit dem die Kaliumatome in der Detektorebene registriert werden?

Welche Intensitätsverteilung im Atomstrahl würde sich ergeben, wenn die Kalium-Atome sich im ersten angeregten Zustand befinden. Warum sind die Atome jedoch im Grundzustand?

Vergleichen Sie Aufbau und Meßverfahren unseres Praktikumsexperiments mit dem historischen Versuch.

3 Meßverfahren

3.1 Meßgleichung zur Bestimmung des magnetischen Moments des Kaliumatoms

Für die Herleitung der Meßgleichung für die Komponente senkrecht zur B -Feldrichtung (z -Komponente) des magnetischen Moments des Kaliumatoms $\vec{m}_{s,z}$ werden Kenntnisse über den Aufbau der Stern-Gerlach-Apparatur vorausgesetzt [5], [6]. Zunächst wird ein Koordinatensystem festgelegt (Abb. 1): Der Atomstrahl breitet sich in x -Richtung aus, der schmale "Strahlkasten" (Breite $z = 2D$, Länge $y = 4a/3$, vgl. auch Abb. 3) steht in y -Richtung, die Aufspaltung im Magnetfeld erfolgt in z -Richtung. Die Apparatekonstanten L und l bezeichnen die Länge der Polschuhe beziehungsweise die Entfernung der Detektorebene (y, u) von der Eintrittsebene in das Magnetfeld (y, z). Die Intensitätsmaxima erscheinen in der Detektorebene an den Orten $+u_e$ und $-u_e$.

Kalium hat ein Außenelektron über abgeschlossenen Schalen. Im Grundzustand ist das magnetische Bahnmoment null, das magnetische Moment des Kaliumatoms wird somit allein durch das magnetische Spinnmoment des Außenelektrons \vec{m}_s bestimmt. Auf die z -Komponente des magnetischen Moments $\vec{m}_{s,z}$ wirkt in der gegebenen experimentellen

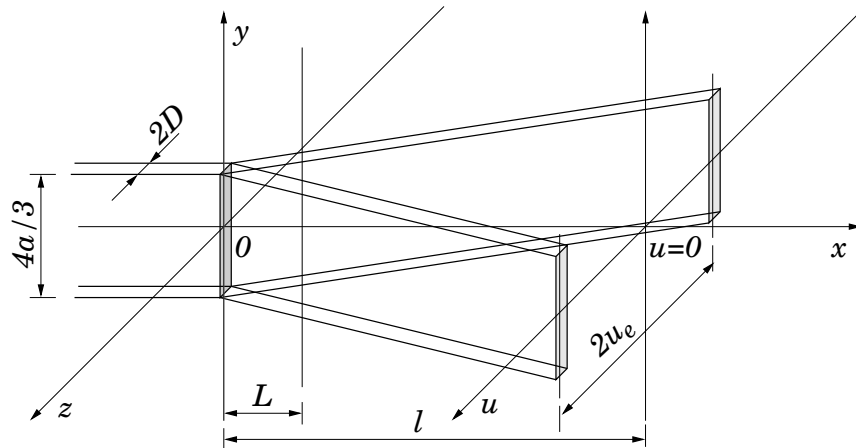


Abbildung 1: Aufspaltung des Atomstrahls im Magnetfeld schematisch

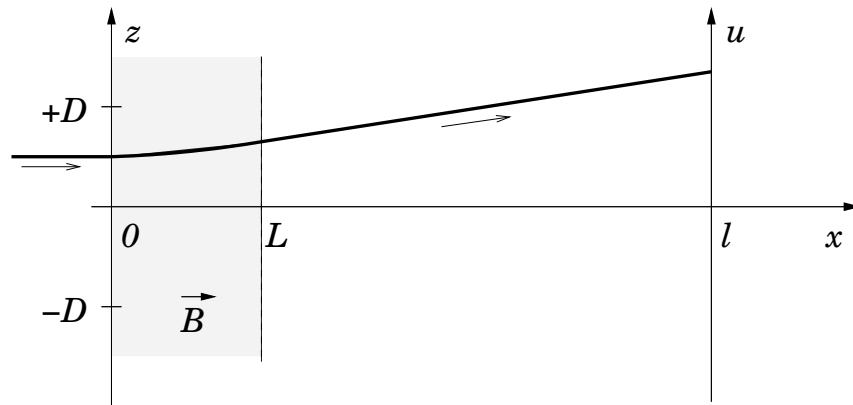


Abbildung 2: Bahn eines Teilchens

Anordnung in z-Richtung die Kraft

$$F_z(y, z) = m_{s,z} \frac{\partial B_z(y, z)}{\partial z} \quad (1)$$

Berechnung der Teilchenbahn

Zunächst wird die Bahn eines einzelnen Atoms berechnet, das mit der Geschwindigkeit v den Ofen verläßt (Abb. 2).

Die Laufzeiten des Atoms in x-Richtung sind $\Delta t = L/v$ für das Durchlaufen des Magnetfeldes der Länge L und $t_l = l/v$ für das Durchlaufen des Weges l vom Eintreten in das Magnetfeld bis zum Eintreten in die Detektorebene.

Die in z-Richtung auf ein Atom wirksame resultierende Kraft F_z infolge der Feldinhomogenität kann in dem vom Atom durchlaufenen räumlichen Bereich des Feldes als konstant

angesehen werden. Die Atome der Masse M erhalten dann während der Zeit Δt den Impuls

$$M\dot{z} = F_z\Delta t. \quad (2)$$

Die Ablenkung Δz in z-Richtung ist

$$\Delta z = \frac{1}{2}\ddot{z}(\Delta t)^2 = \frac{1}{2}\frac{F_z}{M}(\Delta t)^2.$$

Mit Gl. (2) folgt

$$\Delta z = \frac{1}{2}\dot{z}\Delta t. \quad (3)$$

Die Bahnkurve im Magnetfeld ist also eine Parabel. Nach Verlassen des Magnetfeldes bewegt sich das Atom geradlinig gleichförmig. Für den Auftreffort u in der Detektorebene ergibt sich

$$u = z + \Delta z + \dot{z}(t_l - \Delta t) = z + \left(1 - \frac{L}{2l}\right)\frac{l}{v}\dot{z}$$

Mit (1) und (2) folgt

$$u - z = \pm \frac{lL}{Mv^2} \left(1 - \frac{L}{2l}\right) m_{s,z} \frac{\partial B}{\partial z} \quad (4)$$

als grundlegender Zusammenhang zwischen der Ablenkung ($u - z$) in der Detektorebene, der Teilchengeschwindigkeit v und der Inhomogenität $\partial B/\partial z$.

Wie erwartet werden die schnelleren Teilchen weniger stark abgelenkt als die langsameren; die Ablenkung ist dem Quadrat der Teilchengeschwindigkeit umgekehrt proportional.

Geschwindigkeits- und Ortsverteilung im Strahlkasten

Gleichung (4) gilt für ein Teilchen. Für die Teilchen des Atomstrahls liegen jedoch eine Orts- und eine Geschwindigkeitsverteilung vor. Zunächst soll die Verteilungsfunktion der Teilchengeschwindigkeiten im Strahlkasten gefunden werden. Damit kann dann ein Ausdruck für die Ortsabhängigkeit der Teilchenstromdichte in der Detektorebene hergeleitet werden.

Zur Erzeugung des Kalium-Atomstrahls dient ein zylindrischer Ofen mit einer Schlitzblende, der auf eine definierte Temperatur T gebracht wird. Die thermische Geschwindigkeit der Kalium-Atome im Ofen genügt der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung, d.h. die Anzahl der Teilchen dn mit einer Geschwindigkeit zwischen v und $v + dv$ ist in jedem Volumenelement dV des Ofens proportional zu $\exp(-Mv^2/(2kT))v^2dv$, also

$$dn \sim \exp\left(-\frac{Mv^2}{2kT}\right)v^2dv. \quad (5)$$

Diese Proportionalität gilt insbesondere auch für die Teilchen des durch die Blende austretenden Atomstrahls. Innerhalb des Atomstrahls ist die Geschwindigkeitsverteilung aber auch von der Tiefe im Ofen, aus der das jeweilige Teilchen kommt, abhängig. Je tiefer der

Ursprungsort im Ofen liegt, desto weniger Teilchen gleicher Geschwindigkeit erreichen zu einem der Laufzeit entsprechenden späteren Zeitpunkt die Detektorebene; oder anders ausgedrückt: je tiefer der Ursprungsort im Ofen, desto größer muß v sein, um bei fester Laufzeit mit den anderen Teilchen zusammen die Detektorebene zu erreichen. Für die Anzahl der Teilchen dn in der Detektorebene mit Geschwindigkeiten zwischen v und $v + dv$ gibt es somit neben der thermischen noch eine "geometrische" Geschwindigkeitsverteilung. Da sich die Teilchen nahezu geradlinig gleichförmig bewegen, ist es naheliegend, Proportionalität anzunehmen, also

$$dn \sim v dv. \quad (6)$$

Schließlich liegt infolge der endlichen Breite der Ofenaustrittsblende eine Ortsverteilung der Teilchen im Strahlkasten in z -Richtung vor. Die Zahl dn der Teilchen, die zwischen z und $z + dz$ in den magnetischen Analysator (Ebene $x = 0$) laufen, sei durch die Funktion $\Phi_m(z)$ gegeben, wobei der Index $m = \pm 1/2$ die Orientierung des magnetischen Moments bezeichnet:

$$dn \sim \Phi_m(z) dz \quad (7)$$

Der Definitionsbereich von $\Phi_m(z)$ ist $-D \leq z \leq D$, die Maßeinheit ist m^{-1} .

Die Zusammenfassung der Abhängigkeiten (5), (6) und (7) ergibt schließlich die gesuchte Verteilungsfunktion für einen Teilstrahl:

$$d^2n = \frac{\Phi_m(z) \exp\left(-\frac{Mv^2}{2kT}\right) v^3 dv dz}{2 \int_0^\infty \exp\left(-\frac{Mv^2}{2kT}\right) v^3 dv} \quad (8)$$

Teilchenstromdichte in der Detektorebene

Mit Hilfe der Gleichungen (4) und (8) kann jetzt die Teilchenstromdichte $J(u)$ in Abhängigkeit vom Ort u in der Detektorebene berechnet werden. Der Detektorstrom ist proportional zu J .

Alle am Ort z in der Ebene $x = 0$ in das Magnetfeld eintretenden Atome streuen aufgrund ihrer Geschwindigkeitsunterschiede um einen Ort u der Detektorebene, d.h. die Geschwindigkeitsverteilung $d^2n/dv dz$ (Gl. 8) der Atome führt zu einer Ortsverteilung $d^2n/du dz$. Zur Berechnung der Teilchenstromdichte J_m für eine Orientierung m ist also zunächst eine Transformation dv nach du auszuführen und danach die transformierte Verteilung einmal über z zu integrieren in den Grenzen von $-D$ bis $+D$ (Breite des Strahlkastens):

$$J_m(u) = \frac{dn}{du} = \int_{-D}^D \frac{d^2n}{du dz} dz \quad (9)$$

Schließlich muß noch berücksichtigt werden, daß $J(u)$ sich als Summe der Beiträge beider Orientierungen m des magnetischen Moments ergibt:

$$J(u) = J_{+1/2}(u) + J_{-1/2}(u). \quad (10)$$

Mit

$$\frac{d[v(u)]^4}{du} = 4[v(u)]^3 \frac{dv}{du}$$

folgt

$$[v(u)]^3 dv = \frac{1}{4} \left| \frac{d[v(u)]^4}{du} \right| du \quad (11)$$

als Transformationsbeziehung dv nach du . Die Notwendigkeit der Betragsstriche ergibt sich aus $[v(u)]^3 dv > 0$.

$v(u)$ ist durch Gl. (4) gegeben. Umstellen nach v^2 und Quadrieren ergibt

$$[v(u)]^4 = \left[\frac{lL}{M} \left(1 - \frac{L}{2l}\right) m_{s,z} \frac{\partial B}{\partial z} \right]^2 \frac{1}{(u-z)^2}.$$

Differentiation liefert mit der Transformationsbeziehung Gl. (11) für eine Orientierung m (wegen $[v(u)]^3 > 0$ wieder Übergang zum Betrag)

$$[v(u)]^3 dv = \left[\frac{lL(1 - \frac{L}{2l}) m_{s,z} \frac{\partial B}{\partial z}}{2M} \right]^2 \frac{du}{|u-z|^3}. \quad (12)$$

Dieser Ausdruck ist nun in Gl. (8) einzusetzen. Um auch im Exponenten $-Mv^2/(2kT)$ im Zähler von Gl. (8) v^2 zu eliminieren, wird wieder Gl. (4) angewendet. Umstellen nach v^2 und Multiplikation mit $M/(2kT)$ ergibt für eine Orientierung m

$$\frac{Mv^2}{2kT} = - \frac{lL \left(1 - \frac{L}{2l}\right) m_{s,z} \frac{\partial B}{\partial z}}{2kT} \frac{1}{|u-z|}.$$

Die rechte Seite ist > 0 , weil $m_{s,z} < 0$ ist, deshalb die Betragsstriche. Es ist zweckmäßig, folgende Abkürzungen einzuführen:

$$q := - \frac{lL \left(1 - \frac{L}{2l}\right) m_{s,z} \frac{\partial B}{\partial z}}{2kT}, \quad (13)$$

$$A := \frac{\left[lL \left(1 - \frac{L}{2l}\right) m_{s,z} \frac{\partial B}{\partial z} \right]^2}{4M^2 \int_0^\infty \exp\left(-\frac{Mv^2}{2kT}\right) v^3 dv}. \quad (14)$$

Damit ergibt sich aus Gl. (8)

$$d^2n = A \Phi_m(z) \exp\left(-\frac{q}{|u-z|}\right) \frac{1}{|u-z|^3} dudz. \quad (15)$$

Einsetzen in Gl. (9) und Summation über die beiden möglichen Orientierungen ergibt

$$J(u) = A \int_{-D}^D \Phi_{+\frac{1}{2}}(z) \exp\left(-\frac{q}{|u-z|}\right) \frac{1}{|u-z|^3} dz$$

$$+A \int_{-D}^D \Phi_{-\frac{1}{2}}(z) \exp\left(-\frac{q}{|u-z|}\right) \frac{1}{|u-z|^3} dz.$$

Wegen der Gleichheit der Teilchenzahlprofile für beide Orientierungen ist

$$\Phi_{+1/2}(z) + \Phi_{-1/2}(z) := J_0(z)$$

und daher schließlich

$$J(u) = A \int_{-D}^D J_0(z) \exp\left(-\frac{q}{|u-z|}\right) \frac{1}{|u-z|^3} dz. \quad (16)$$

Für $B = 0$ bzw. $\partial B/\partial z = 0$ ist $u = z$ und von v unabhängig. In diesem Fall entfallen die Voraussetzungen für die Ableitung von Gl. (16), sie kann nicht angewendet werden. Praktisch entspricht dann $J(u)$ dem Teilchenzahlprofil $\Phi_{(m)}(z)$, daher ist es zweckmäßig, für diesen Fall zu setzen:

$$J(u) \big|_{B=\frac{\partial B}{\partial z}=0} = J_0(u) = J_0(z).$$

Um eine Bestimmungsgleichung für $J(u)$ aus Gl. (16) zu erhalten, muß noch die Integration ausgeführt werden, wozu wiederum $J_0(z)$ bekannt sein muß. Im Prinzip kann $J_0(z)$ gemessen werden, praktisch ist das aber nicht möglich. Deshalb muß für $J_0(z)$ eine Näherungsannahme gemacht werden, hier wird ein *beliebig schmaler Strahlkasten* angenommen.

Das Teilchenzahlprofil $J_0(z)$ hat dann die Gestalt

$$J_0(z) = 2Dj_0\delta(z), \quad (17)$$

dabei ist j_0 die Teilchenzahl pro Flächeneinheit im Strahlkasten, $2D$ die Breite des Strahlkastens und $\delta(z)$ die Diracsche Delta-Distribution, definiert durch

$$\delta(z) = \frac{dH(z)}{dz} \quad \text{mit} \quad H(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } z < z_0 \\ 1 & \text{für } z \geq z_0 \end{cases}.$$

$H(z)$ ist die Heavisidesche Sprungfunktion.

Einsetzen in Gl. (16) und partielle Integration ergibt

$$J(u) = 2DAj_0 \left\{ \left[H(z) \exp\left(-\frac{q}{|u-z|}\right) \frac{1}{|u-z|^3} dz \right]_{-D}^D - \int_{-D}^D H(z) \frac{d}{dz} \left[\exp\left(-\frac{q}{|u-z|}\right) \frac{1}{|u-z|^3} dz \right] \right\}.$$

Der erste Summand verschwindet, da die Funktion

$$\exp\left(-\frac{q}{|u-z|}\right) \frac{1}{|u-z|^3}$$

an den Grenzen $-D$ und D definitionsgemäß verschwindet. Der zweite Summand wird zerlegt und dann gliedweise integriert, das führt auf

$$J(u) = 2DAj_0 \exp\left(-\frac{q}{|u|}\right) \frac{1}{|u|^3}. \quad (18)$$

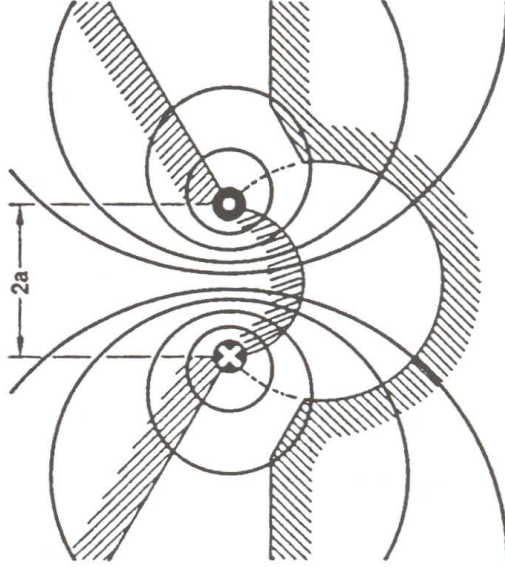


Abbildung 3: Schnitt durch den magnetischen Analysator

Die Lagen u_e der Intensitätsmaxima findet man durch Differentiation

$$\frac{dJ(u)}{du} = 2DAj_0 \frac{q - 3|u|}{|u|^5} \exp\left(-\frac{q}{|u|}\right).$$

Nullsetzen und Umformen ergibt schließlich $|u_e| = q/3$, also

$$u_e = \pm \frac{q}{3} = \frac{lL(1 - \frac{L}{2l})m_{s,z} \frac{\partial B}{\partial z}}{6kT}. \quad (19)$$

Bei bekannter Inhomogenität $\partial B/\partial z$ kann $m_{s,z}$ somit durch Ausmessen der Lagen u_e der Intensitätsmaxima ermittelt werden. Weiterhin müssen noch die Apparatekonstanten L und l sowie die Temperatur T im Ofen bekannt sein.

3.2 Berechnung der magnetischen Induktion B und des Feldgradienten $\partial B/\partial z$

In Abb. 3 ist ein Schnitt senkrecht zur Strahlrichtung durch den magnetischen Analysator dargestellt. Solange die Magnetisierung nicht in die Sättigung kommt, liegen die kreiszylindrischen Polschuhe genau in zwei Äquipotentialflächen eines fiktiven Zweidrahtsystems mit entgegengesetzten Stromrichtungen. Die fiktiven Drähte haben den Abstand $2a$, dabei ist a der Radius des konvexen Polschuhs.

Im Feld eines solchen Zweidrahtsystems gibt es eine Ebene, für die $\partial B/\partial z$ in y -Richtung im Bereich des Strahlkastens ($|y| \leq 2a/3$) näherungsweise konstant ist. Diese Ebene sei $z = 0$,

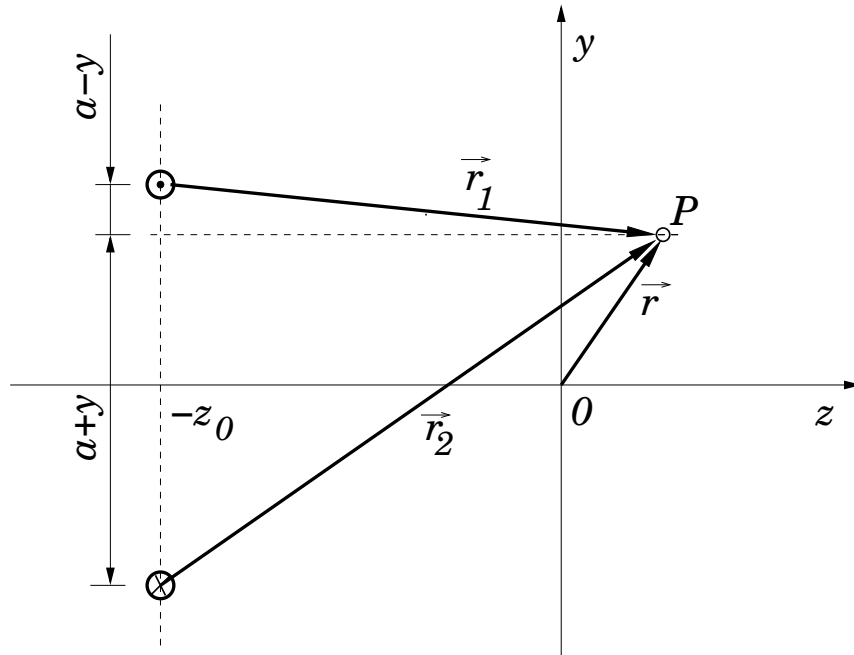


Abbildung 4: Zur Berechnung von $B(r)$ bzw. $B(y, z)$

ihr Abstand von der Ebene der fiktiven Drähte sei z_0 . Die Ebene $z = 0$ ist Symmetrieebene des Strahlkastens; z_0 muß bekannt sein, um den Strahl zu justieren. Weiterhin muß für eine symmetrische Aufspaltung $\partial B/\partial z$ in der Umgebung von $z = 0$ linear abhängig von z sein.

Im Prinzip kann $\Delta B/\Delta z$ gemessen werden, etwa mit einer Hallsonde. Aus technischen Gründen (Kleinheit und Unzugänglichkeit des auszumessenden Volumens) ist das praktisch jedoch nicht möglich. Daher wird schließlich ein möglichst einfacher Zusammenhang zwischen B und $\partial B/\partial z$ am Ort $z = 0$ gesucht, der es erlaubt, $\partial B/\partial z$ aus B zu berechnen. $B(z = 0)$ ist mit einer Hallsonde meßbar.

Der Betrag der magnetischen Induktion B im Aufpunkt P (vgl. Abb. 4) ist

$$B(r) = \frac{\mu_0 I a}{\pi r_1 r_2}, \quad (20)$$

dabei sind μ_0 die Permeabilität des Vakuums und I die Stromstärke im Draht. Mit den Beziehungen

$$r_1^2 = (y - a)^2 + (z + z_0)^2 \quad \text{und} \quad r_2^2 = (y + a)^2 + (z + z_0)^2 \quad (21)$$

folgt

$$B(y, z) = \frac{\mu_0 I a}{\pi} [(a^2 - y^2)^2 + 2(z + z_0)^2(a^2 + y^2) + (z + z_0)^4]^{-\frac{1}{2}}. \quad (22)$$

Die Feldinhomogenität $\partial B/\partial z$ ergibt sich durch Differentiation:

$$\frac{\partial B(y, z)}{\partial z} = -\frac{2\mu_0 I a(z + z_0)}{\pi} \cdot \frac{a^2 + y^2 + (z + z_0)^2}{[(a^2 - y^2)^2 + 2(z + z_0)^2(a^2 + y^2) + (z + z_0)^4]^{\frac{3}{2}}}. \quad (23)$$

Zur Berechnung von z_0 , d.h. zum Aufsuchen der Ebene $z = 0$, in der $\partial B/\partial z$ in y -Richtung im Bereich des Strahlkastens konstant ist, wird $\partial B(y, z)/\partial z$ an der Stelle $y = 0$ in eine Reihe nach y^2 entwickelt und die Reihenentwicklung wegen $y^2 \ll (z + z_0)^2$ und $y^2 \ll a^2$ nach dem Glied 1. Ordnung abgebrochen. Es ergibt sich

$$\left| \frac{\partial B(y, z)}{\partial z} \right| \approx \frac{2\mu_0 I a(z + z_0)}{\pi} \cdot \frac{1 + 2y^2 \frac{2a^2 - (z + z_0)^2}{[a^2 + (z + z_0)^2]^2}}{[a^2 + (z + z_0)^2]^2}. \quad (24)$$

An der Stelle $z = 0$ soll die Abhängigkeit von y verschwinden; d.h. es muß gelten

$$2a^2 - z_0^2 = 0;$$

daraus folgt sofort

$$z_0 = \sqrt{2}a. \quad (25)$$

Damit ist der Ursprung der z -Achse festgelegt, der die Lage des Strahlkastens im magnetischen Analysator festlegt.

Um einen Zusammenhang zwischen B und $\partial B/\partial z$ am Ort $z = 0$ zu finden, wird angenommen, daß für kleine Ablenkungen z der Teilchen $\partial B/\partial z$ proportional zu B sei. Es wird nun die Lage derjenigen Ebene z_1 gesucht, für die der Proportionalitätsfaktor

$$\epsilon = \left| \frac{\partial B}{\partial z} \right| \frac{a}{B} \quad (26)$$

eine in der Umgebung von $z = 0$ von y unabhängige Größe ist. Dazu wird $\epsilon(y, z)$ an der Stelle $y = 0$ in eine Reihe nach y^2 entwickelt und die Reihe wieder wegen $y^2 \ll z_0^2$ und $y^2 \ll a^2$ nach dem Glied 1. Ordnung abgebrochen. Das Resultat lautet:

$$\epsilon(y, z) \approx \frac{2a(z + z_0)}{a^2 + (z + z_0)^2} \left\{ 1 + \frac{y^2}{[a^2 + (z + z_0)^2]^2} [3a^2 - (z + z_0)^2] \right\}. \quad (27)$$

An der Stelle $z = z_1$ soll die Abhängigkeit von y verschwinden, d.h.

$$3a^2 - (z_1 + z_0)^2 = 0.$$

Daraus folgt mit Gl. (25)

$$z_1 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})a \approx 0.3a. \quad (28)$$

An der Stelle z_1 ist also der Umrechnungsfaktor ϵ eine im Bereich des Strahlkastens von y unabhängige Größe.

Die Ebene $z = z_1$ ist zwar verschieden von der Ebene $z = 0$; dennoch ist $\epsilon(y, 0)$ im Bereich des Strahlkastens praktisch unabhängig von y . Aus

$$\epsilon(y, 0) = \frac{2az_0}{a^2 + z_0^2} \left\{ 1 + \frac{y^2}{(a^2 + z_0^2)^2} (3a^2 - z_0^2) \right\}$$

ergeben sich $\epsilon(0, 0) = 0.943$ und $\epsilon(2a/3, 0) = 0.989$. Zur Berechnung der Inhomogenität $\partial B/\partial z$ wird der Mittelwert

$$\epsilon = 0.966 \pm 0.023$$

verwendet.

Die magnetische Induktion $B = B(0, 0)$ wird aus dem Spulenstrom I_{Sp} bestimmt. Der Zusammenhang ist in Abb. 5 (Anhang) dargestellt. Damit kann $\partial B/\partial z$ nach Gl. (26) berechnet werden.

4 Versuchsdurchführung und -auswertung

1. Arbeitsschutz: Es sind keine besonderen Maßnahmen erforderlich.
2. Der Rezipient steht dauernd unter Hochvakuum, da der Ofen mit Kalium gefüllt ist. Für die Messungen ist ein Vakuum von mindestens 4×10^{-6} mbar erforderlich. Die Apparatur ist bereits justiert.
3. Bauen Sie zuerst die elektrischen Stromkreise für Ofen, Detektor und Elektromagnet sowie den Meßkreis auf. Der Detektor wird über einen Anpassungstrafo betrieben, der sowohl die Vorspannung des Wolfram-Drahtes als auch dessen Heizspannung bereitstellt. Die Versorgungsspannungen für Ofen, Anpassungstrafo und Elektromagnet werden einem speziellen Netzgerät (PHYWE) entnommen.
 - Heizspannung für den Ofen stufenlos einstellbar im Bereich $U_H = (0 \dots 15)$ V, max. 1 A \sim .
 - Primärspannung des Anpassungstrafos stufenlos einstellbar im Bereich $U = (0 \dots 15)$ V, max. 0.6 A \sim . Der Anpassungstrafo wird sekundärseitig direkt mit dem Detektor verbunden.
 - Spulenstrom für Elektromagnet stufenlos einstellbar im Bereich $I_{Sp} = (0 \dots 1)$ A \sim , Strom auf maximal 1 A begrenzen.
 - Detektorausgang über ein rauscharmes BNC-Kabel und einen BNC-nach-Triax-Adapter mit dem Eingang des Picoamperemeters verbinden.
 - Thermoelement (im Ofen) mit dem Eingang des Temperaturmeßgeräts (Linseis) verbinden. Einstellungen: Typ "6 J Fe-Co", Betriebsart "Lin".

4. Inbetriebnahme

- Schalten Sie das Netzgerät für Ofen-, Detektor- und Spulenspannung, das Picoamperemeter, das Temperaturmeßgerät und die Schrittmotorsteuerung ein. Achten Sie darauf, daß die Magnetspulen zunächst nicht mit Spannung versorgt werden. Ein remanentes Magnetfeld könnte weitere Messungen beeinflussen.
- Nehmen Sie die Heizung (Ofen) in Betrieb. Richtwert für eine Ofentemperatur von 180 °C: 5.7 V (ca. 0.4 A); zum schnelleren Anheizen können Sie kurzzeitig (10 min) maximal 12 V anlegen.
- Nehmen Sie den Detektor in Betrieb. Richtwert für die Primärspannung des Anpassungstrafo: 10.5 V (ca. 0.5 A). Zunächst den “Dunkelstrom” messen, dieser sollte < 10 pA sein. Bei zu hohem Dunkelstrom den Wolfram-Draht glühen, dazu kurzzeitig (maximal 1 min) die Primärspannung auf 15 V (ca. 0.7 A) erhöhen, ggf. mehrmals wiederholen, danach den Dunkelstrom abklingen lassen.
- Schalten Sie den Computer ein. Richten Sie sich einen neuen Ordner unter `c:\st_ge\` oder auf dem Praktikumsserver ein. Das Messprogramm starten Sie durch Anklicken der Verknüpfung auf dem Desktop. Es erklärt sich selbst.

5. Messungen

Der Detektorstrom I wird bei konstanter Temperatur im Ofen in Abhängigkeit vom Ort u in der Meßebeine zunächst ohne Magnetfeld und dann mit dem Spulenstrom I_{Sp} als Parameter gemessen.

Um den Einfluß der magnetischen Hysterese möglichst gering zu halten, sollten die Messungen mit steigenden Spulenströmen ($0.2 \text{ A} < I_{Sp} < 1.0 \text{ A}$) vorgenommen werden. Falls erforderlich, auf jeden Fall aber nach der letzten Messung mit dem höchsten Spulenstrom sollten die Polschuhe durch langsames Umpolen bei immer niedrigeren Stromstärken (ca. $10\times$) entmagnetisiert werden.

Die Steuerung des Schrittmotors sowie die Meßwerterfassung erfolgen mit dem Computer. Die Detektorposition kann mit einem Einstellgetriebe gewählt werden.

6. Nach Beendigung der Messungen entmagnetisieren Sie die Polschuhe (s. oben) und schalten die Stromversorgung für Ofen, Anpassungstrafo und Magnetspulen, das Picoamperemeter, das Temperaturmeßgerät, die Motorsteuerung sowie die Hand-Multimeter aus.

7. Auswertung:

Leiten Sie an Hand von Abb. 4 die Gleichung (20) her.

Berechnen Sie unter Zugrundelegung der Näherung *beliebig schmaler Strahlkasten* aus der Meßreihe $u_e = u_e(\partial B/\partial z)$ das magnetische Moment $m_{s,z}$ des Kalium-Atoms sowie dessen Unsicherheit $\Delta m_{s,z}$.

Literatur

- [1] O. Stern, Ein Weg zur experimentellen Prüfung der Richtungsquantelung im Magnetfeld, Zeitschrift für Physik Bd. 7 (1921), S. 249-253
- [2] W. Gerlach, O. Stern: Der experimentelle Nachweis des magnetischen Moments des Silberatoms, Zeitschrift für Physik, Bd. 8 (1921), S. 110-111
- [3] W. Gerlach, O. Stern, Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld, Zeitschrift für Physik, Bd. 9 (1922), S. 349-352
- [4] W. Gerlach, O. Stern, Das magnetische Moment des Silberatoms, Zeitschrift für Physik, Bd. 9 (1922), S. 353-355
- [5] M. Böhm, A. Scharmann *Höhere Experimentalphysik* Weinheim: VCH 1992, S. 236-241
- [6] Stern-Gerlach-Apparatur, Druckschrift der PHYWE Systeme GmbH, Göttingen
- [7] Stern-Gerlach Experiment, PHYWE Series of Publications, Laboratory Experiments, Physics, PHYWE Systeme GmbH, Göttingen
- [8] B. Friedrich, D. Herschbach, Stern and Gerlach: How a Bad Cigar Helped Reorient Atomic Physics, *Physics Today*, Vol. 56, Nr. 12 (Dec. 2003) pp. 53-59

Kopien der Publikationen befinden sich in der Versuchsmappe.

Anhang

Apparatekonstanten

Länge der Polschuhe: $L = 70$ mm,

Abstand Eintrittsebene des Magnetfeldes - Detektorebene: $l = 455$ mm.

Radius des konvexen Polschuhs: $a = 2.5$ mm.

Eine Umdrehung der Spindel (100 Skt.) entspricht $u = 1.8$ mm Detektorverschiebung.

Magnetische Induktion im Zentrum des magnetischen Analysators

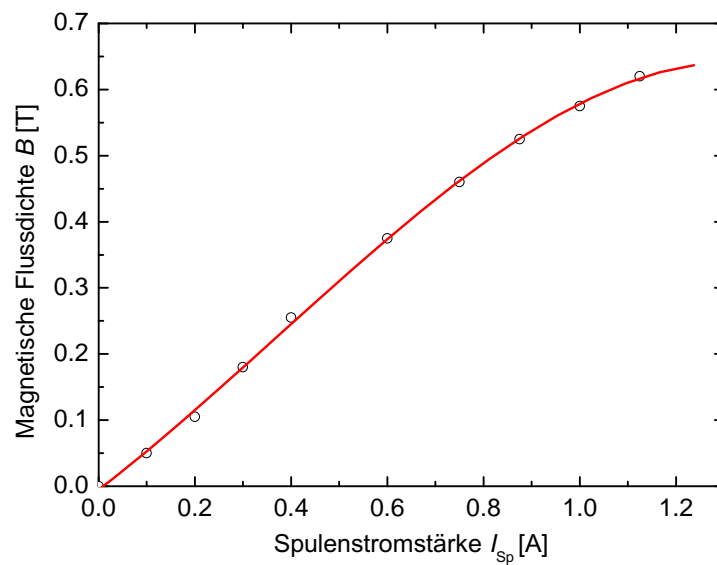


Abbildung 5: Magnetische Induktion B im Zentrum des Helmholtzspulenpaars als Funktion der Spulenstromstärke I_{Sp} . Die durchgezogene Kurve ist der Graph der Funktion $B = -0.00512 \text{ T} + 0.55713 \frac{\text{T}}{\text{A}} \times I_{Sp} + 0.26883 \frac{\text{T}}{\text{A}^2} \times I_{Sp}^2 - 0.24218 \frac{\text{T}}{\text{A}^3} \times I_{Sp}^3$.