from:
M. Neubrand, ed., 1998:Beiträge zum Mathematikunterricht 1998. Vorträge auf der 32. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 2. bis 6. März 1998 in München. Hildesheim: Franzbecker, pp.647-650.

Heike WIESE, Berlin / Ilse WIESE, Göttingen

Mathematik und Sprache – ein Problem aus dem Bereich der „gemischten Zahlen"

1 Vorbemerkung

Wir stellen im folgenden ein Phänomen aus dem Bereich des Erwerbs sogenannter „gemischter Zahlen" (genauer: „gemischter" Bezeichnungen von Bruchzahlen) vor, das an der Schnittstelle sprachlichen und mathematischen Wissens angesiedelt ist. Zum Problembereich der gemischten Zahlen und dem der Übertragung sprachlichen Wissens aus nicht-mathematischen Kontexten existiert in der mathematik-didaktischen Literatur bereits eine ausführliche Diskussion, auf die wir an dieser Stelle jedoch nicht näher eingehen können. Wir wollen hier anhand eines spezifischen, aber zentralen Problems bei „gemischten Zahlen" aufzeigen, daß ein besonderer Schwierigkeitsgrad in diesem Bereich aus Problemen auf der *Ebene des sprachlichen Ausdrucks* herrührt.

2 Die Schnittstelle sprachlichen und mathematischen Wissens

Für die folgende Diskussion ist die Abgrenzung von mathematischem Wissen i.e.S. und sprachlichem Wissen zentral. Wir unterscheiden hierfür zwischen einem *sprachlichen System LS* und einem *konzeptuellen System CS*. Zu LS zählen wir Bezeichnungen mathematischer Objekte, im vorliegenden Fall also beispielsweise komplexe Zahlwörter wie „zwei drei fünftel" oder Bezeichnungen im Ziffernformat wie „2 $\frac{3}{5}$". CS umfaßt dagegen (neben anderem) das Wissen um mathematische Objekte selbst und die zwischen ihnen bestehenden Relationen. LS ist mit CS durch eine Interpretationsfunktion verknüpft, die sprachliche Konstruktionen auf ihre Referenten abbildet (und umgekehrt Bezeichnungen für mathematische Objekte bereitstellt).

Abbildung 1 illustriert die im folgenden zugrunde gelegten Annahmen (in der Graphik seien *Repräsentanten* von Brüchen als stellvertretend für die mathematischen Objekte selbst verstanden):

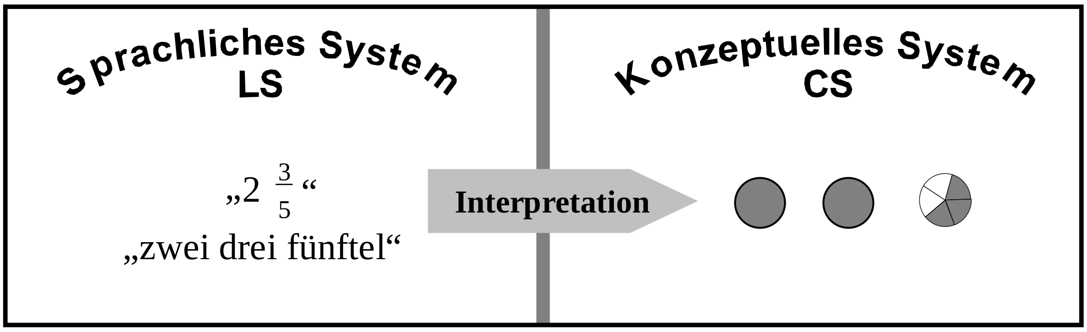

Abbildung 1

3 Daten: Eigenproduktionen einer 6.Klasse

Die Untersuchung von Eigenproduktionen von Schüler(innen) einer 6. Klasse zum Bereich der Brüche wies auf einen spezifischen Fehlertypus hin, der auffällig häufig und insbesondere auch bei leistungsstarken Schülerinnen und Schülern auftrat. In Abbildung 2 sind exemplarisch einige der relevanten Daten aufgeführt:

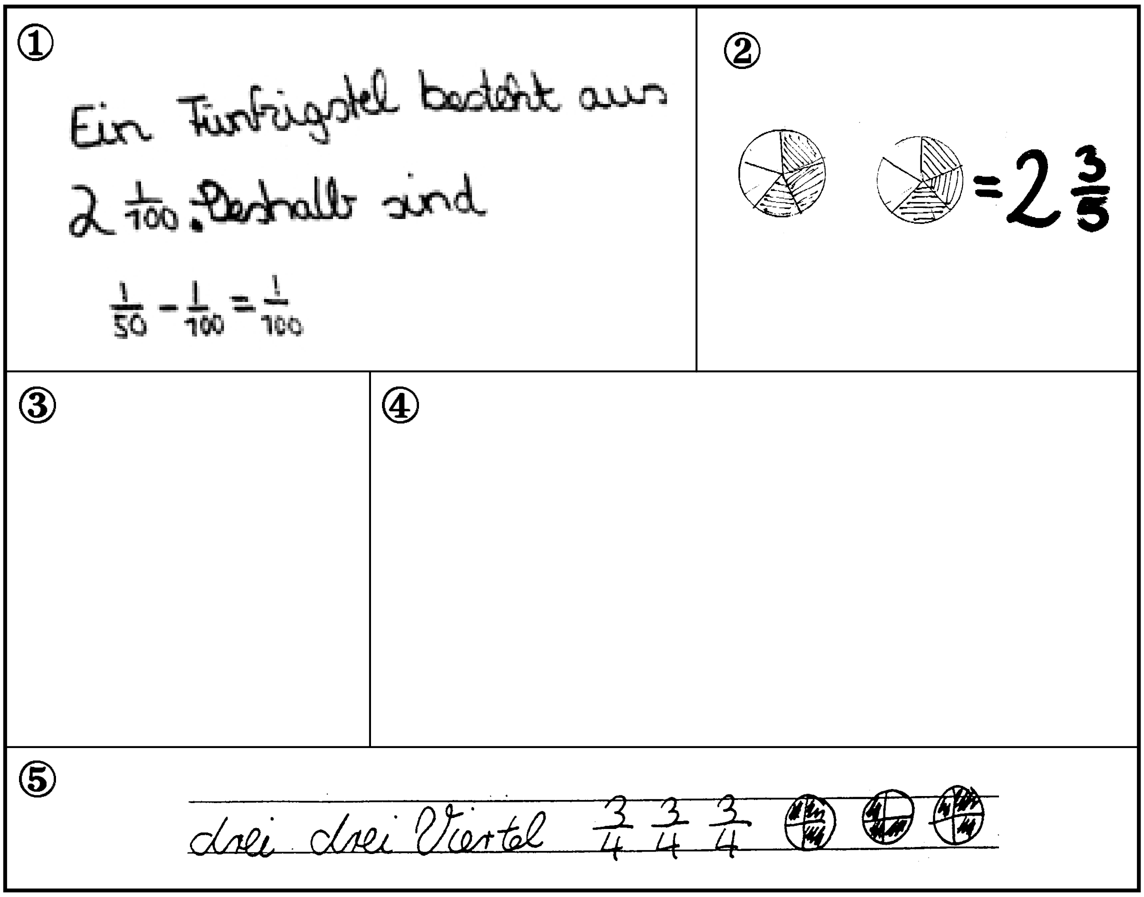

Abbildung 2

Die vorgestellten Daten verweisen auf eine spezifische Interpretation der involvierten Zahlwörter: *Schüler(innen) der Sek.I interpretieren „gemischte" Bruchzahlbezeichnungen wie „zwei drei fünftel" oder „$2\frac{3}{5}$" anfangs häufig multiplikativ statt additiv*, d.h. sie verstehen sie im Sinne von (a) statt – wie es konventionell wäre – im Sinne von (b):

(a) zwei *mal* (drei fünftel); $2 \cdot \frac{3}{5}$ [nicht-konventionelle Interpretation];
(b) zwei *plus* (drei fünftel); $2 + \frac{3}{5}$ [konventionelle Interpretation].

Dieses Phänomen betrifft sowohl Bezeichnungen im Ziffernformat (Bsp.e 1-3 in Abbildung 2) als auch natürlichsprachliche Zahlwörter (Bsp. 5; die gemischte Bruchzahlbezeichnung im Ziffernformat wurde hier durch Aufzählung vermieden) sowie „kombinierte" Bezeichnungen wie in Bsp. 4.

4 Das Interpretationsproblem für gemischte Bruchzahlbezeichnungen: „Vs-Verführer“ im Deutschen

Wir führen das Auftreten nicht-konventioneller multiplikativer Interpretationen auf eine Übertragung des Sprachgebrauchs aus nicht-mathematischen Kontexten zurück: *Enge Parallelen zu natürlichsprachlichen Anzahlangaben können als Auslöser für eine multiplikative statt additive Interpretation gemischter Bruchzahlbezeichnungen wirken.*

Bei diesen „Vs-Verführern“ („verbalsprachlichen Verführern“) handelt es sich um einfache Anzahlangaben mit Zählnomen sowie um Anzahlangaben mit konkreten Bruchzahlbezeichnungen[1]. Diese Konstruktionen werden konventionell multiplikativ bzw. kardinal interpretiert; bei einer Übertragung der Interpretation auf gemischte Bruchzahlwörter kommt es daher zu Normabweichungen. Die folgenden Aufstellung illustriert die Zusammenhänge:[2]

<table>
<tr><th>Konstruktions-Typ</th><th>sprachliches Beispiel</th><th>Interpretation</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Anzahlangabe mit Zählnomen</td><td>„sieben Zwerge“</td><td>multiplikativ / kardinal</td></tr>
<tr><td colspan="2">„Sieben Zwerge sind sieben mal so viele wie ein Zwerg.“
„Wie viele Zwerge?“ - „Sieben.“</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Anzahlangabe mit konkreter Bruchbezeichnung</td><td>„zwei Zweidrittelstellen“;
„zwei Dreiviertelstunden“</td><td>multiplikativ</td></tr>
<tr><td colspan="2">„Zwei Zweidrittelstellen sind doppelt so viele wie eine.“
„Wie viele Dreiviertelstunden?“ – „Zwei.“</td></tr>
<tr><td rowspan="2">gemischte Bruchzahl-bezeichnung</td><td>„zwei drei fünftel“; „$2\frac{3}{5}$“</td><td>nicht-konventionelle Interpretation der Schüler(innen):
multiplikativ</td></tr>
<tr><td colspan="2">„$2\frac{3}{5} = 2\cdot\frac{3}{5}$“ [nicht-konventionell] / „$2\frac{3}{5} = 2+\frac{3}{5}$“ [konventionell]</td></tr>
</table>

Wie die Aufstellung verdeutlicht, weisen gemischte Bruchzahlbezeichnungen somit eine kritische Ähnlichkeit mit Wendungen aus dem nicht-mathematischen Sprachgebrauch auf, die multiplikativ verstanden werden.

Werden gemischte Bruchzahlbezeichnungen in konkreten Angaben gebraucht, so geht die Übereinstimmung so weit, daß die Konstruktion in der gesprochenen Sprache mehrdeutig erscheinen kann:

(a) „$2\frac{2}{3}$ Stellen“ *[gemischte Bruchzahlbezeichnung in konkreter Angabe];*
(b) „zwei Zweidrittelstellen“. *[Anzahlangabe mit konkreter Bruchbezeichnung].*

---

[1] Genauer: Anzahlangaben für Mengen konkreter Bruchteile; vgl. die Beispiele unten.
[2] Für eine detaillierte Analyse vgl. Wiese/Wiese (1997).

Während in dem Beispiel unter (a) die Bruchzahlbezeichnung konventionell *additiv* interpretiert wird, ist (b) als Anzahlangabe *multiplikativ* zu verstehen. Die folgende Reflexion eines Schülers der Klasse 6 verdeutlicht die Schwierigkeit, die dies für die Lernenden im Mathematikunterricht verursachen kann:

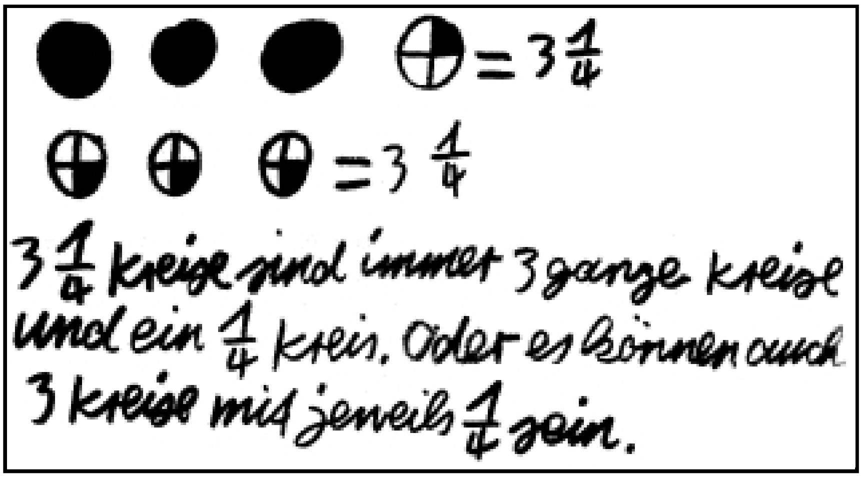

Abbildung 3

5 Mathe-Spiele zur Unterstützung des Lernprozesses

Ziel des Unterrichts sollte somit die *deutliche Kennzeichnung gemischter Bruchzahlbezeichnungen als additiv* sein. Zur Unterstützung des Lernprozesses haben wir in Wiese/Wiese (1997) verschiedene „Mathe-Spiele" vorgestellt, die wir für diesen Bereich entwickelt haben.

Die Spiele zielen auf den kognitiven Zusammenhang von Bruchzahlen und ihren Bezeichnungen. Zentrales Element ist jeweils die Verknüpfung von konkreten oder graphisch dargestellten Bruchrepräsentanten mit unterschiedlichen Bezeichnungen der betreffenden Bruchzahl (als natürlichsprachliches Zahlwort sowie in Ziffernformat). Die Schüler(innen) lernen und festigen so spielerisch die zielsprachlich konventionelle Interpretation der diskutierten Konstruktionen.

Der kontrollierte Einsatz dieser Spiele im Mathematikunterricht wird zur Zeit vorbereitet. Ein erster – noch wenig aussagekräftiger – Probelauf in einer 6.Klasse läßt jedoch bereits vermuten, daß der Einsatz solcher Übungen zum additiven Verständnis gemischter Bruchzahlbezeichnungen sich als sehr effektiv erweisen könnte.

Literatur

Wiese, Heike / Wiese, Ilse (1997): *„Zwei Dreiviertelstunden sind kürzer als zwei drei Viertel Stunden." Interdisziplinäre Überlegungen zur Problematik von Bruchzahlen, Zahlwörtern und Bruchzahlkonzepten.* Ms., Berlin / Göttingen; eingereicht bei JMD.